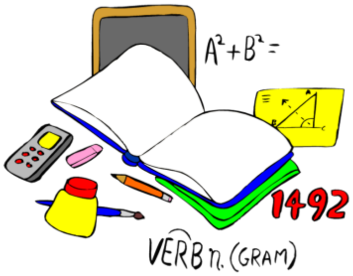
MEDUCA
PARA TODA LA VIDA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

MÓDULO DE MATEMÁTICA



DÉCIMO GRADO

I TRIMESTRE

55 años

17 de mayo 1965

DOCENTES DE 10°

2020

PRESENTACIÓN

La pandemia del CORONAVIRUS o COVID-19, ha impactado directamente el desarrollo de las actividades educativas en casi todos los países del mundo. En Panamá, desde el pasado 11 de marzo se vieron afectadas las clases en todos los planteles del país, afectando a miles de estudiantes. El cierre de los centros educativos ha traído repercusiones negativas en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Por un lado, los estudiantes sin recibir los conocimientos necesarios y por el otro lado, los docentes sin un plan de emergencia para dar respuestas inmediatas al educando. Esto, ha llevado tanto a directores de escuelas como docentes a buscar alternativas, en la medida de lo posible, para minimizar los efectos adversos que trajo como consecuencia esta pandemia.

En este punto cabe resaltar que el ministerio de educación hace ingentes esfuerzos para la implementación de políticas para fortalecer la capacidad de respuesta del sistema educativo.

Una de las alternativas más viables para continuar con el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, ante esta emergencia sanitaria, es la educación a distancia, una educación cuya responsabilidad principal recae en el interés del estudiante y la supervisión estricta del padre o madre de familia con ayuda y las debidas orientaciones del docente.

El cuerpo directivo, administrativo y docente Instituto Profesional y Técnico de Veraguas, desde el primer momento de suspensión de clases se ha preparado, días tras día, para mantener cierta continuidad en los procesos de Enseñanza – Aprendizaje: la capacitación de los docentes en herramientas tecnológicas ha sido un factor importante; la comunicación entre docentes y directivos para evitar la deserción escolar, en la búsqueda y localización de cada uno de los estudiantes también ha sido un desafío; el trabajo en equipo favoreció la dosificación de los contenidos en cada nivel, la confección de módulos y guías didácticas.

Aún falta mucho por recorrer y todo dependerá del rol que se asuma para lograr los objetivos planteados en este año 2020. Al final del camino, la última palabra la tiene aquel individuo, que a pesar de las dificultades y obstáculos decida seguir adelante. ***¡BIENVENIDO!***

Matemática 10°, es una asignatura que está fundamentada en 4 pilares principales, ÁLGEBRA, GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA y ESTADÍSTICA, para esta primera parte nos enfocaremos en ÁLGEBRA y parte de GEOMETRÍA. Se ha tratado de buscar los esenciales básicos para que se logre el aprendizaje. El módulo está redactado con ejemplos explicados y asignaciones. Además, periodos y fechas probables para su realización. Esperemos que aproveches esta oportunidad que se te ofrece para la construcción de tu conocimiento.

¡EL MEJOR DE LOS ÉXITOS!

Unidad

1

Aplica las leyes de los exponentes y desarrolla la potenciación en distintas operaciones con expresiones algebraicas y aritméticas.

TEORÍA DE LOS EXPONENTES

(27 DE JULIO AL 31 DE JULIO)

Entender la teoría de los exponentes y sus propiedades es de gran utilidad para que el estudiante enfrente diversas situaciones de la vida diaria. En el álgebra, cuando estamos en presencia de multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas así como también otras áreas de la matemática, se utilizan sus leyes para simplificar operaciones aplicando diversos procedimientos, el éxito dependerá del uso correcto de sus reglas.

El conocimiento de las reglas de la potenciación es fundamental en el desarrollo de este tema.

1.1 La potenciación: Es la operación que consiste en multiplicar un determinado número de veces un factor llamado base, este factor es indicado por otro número llamado exponente, el resultado de esta operación se le llama potencia.

$$\boldsymbol{(a)^n = (a)(a)(a)\ldots a = b}$$

$$\boldsymbol{n\ factores}$$

Donde, $a\ es\ la\ base,\ \ n\ el\ exponente\ y\ b\ la\ potencia$.

1.2 ELEMENTOS DE LA POTENCIACIÓN

La base: Es el factor que se repite.

El exponente: Es el número que se repite la base.

La potencia: Es el producto o resultado de los factores iguales.

exponente

base $\longrightarrow$ $(a)^n = b$ $\longleftarrow$ ***potencia***

Ejemplos: $(\mathbf{3x})^{\mathbf{5}} = (\mathbf{3x})(\mathbf{3x})(\mathbf{3x})(\mathbf{3x})(\mathbf{3x}) = \mathbf{243x^5}$

$\boldsymbol{Los\ factores\ 3x\ se\ repite\ 5\ veces.}$

$$\left(-\frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{3z}}\right)^{\mathbf{4}} = \left(-\frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{3z}}\right)\left(-\frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{3z}}\right)\left(-\frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{3z}}\right)\left(-\frac{\mathbf{2y}}{\mathbf{3z}}\right) = \frac{\mathbf{16y^4}}{\mathbf{81z^4}}$$

$\boldsymbol{los\ factores\frac{-2y}{3z}\ \ se\ repite\ 4\ veces.}$

1.3 LEY DE LOS SIGNOS

Para calcular la potencia de cualquier número, es importante conocer las leyes de los signos que rigen en tal operación.

La ley de los signos depende del signo de la base y del exponente si es par o impar.

$$(-)^{par} = +$$

$$(+)^{par} = +$$

$$(+)^{impar} = +$$

$$(-)^{impar} = -$$

En síntesis, solo la respuesta es negativa cuando la base es negativa y el exponente es un número impar.

Ejemplos:

$(-2x)^4 = (-2x)(-2x)(-2x)(-2x) = +16x^4$ La base negativa, el exponente par.

$(3x^2y^3)^6 = (3x^2y^3)(3x^2y^3)(3x^2y^3)(3x^2y^3)(3x^2y^3)(3x^2y^3) = +729x^{12}y^{18}$

La base positiva, el exponente par.

$(5xy^4)^3 = (5xy^4)(5xy^4)(5xy^4) = +125x^3y^{12}$ La base positiva, el exponente impar.

$(-2a^3b^2)^5 = (-2a^3b^2)(-2a^3b^2)(-2a^3b^2)(-2a^3b^2)(-2a^3b^2) = -32a^{15}b^{10}$

La base negativa, el exponente impar.

1.4 REGLAS DE LOS EXPONENTES

Las reglas de los exponentes son las que garantizan resultados satisfactorios en el desarrollo de ejercicios con expresiones algebraicas.

Un exponente sólo se aplica al factor, número o letra que esta inmediatamente a su izquierda.
Ejemplo:
$3x^5,\ el\ exponente\ 5\ sólo\ es\ aplicable\ para\ el\ factor\ x,\ el\ número\ 3\ tiene\ exponente\ 1$

Si una cantidad está con paréntesis y es elevada a un exponente cualquiera, el exponente se aplica a todos los factores, números o letras que están dentro del paréntesis.
Ejemplo: $(3x)^5,\ el\ exponente\ 5\ \ es\ aplicable\ para\ el\ factor\ x,\ \ y\ para\ el\ número\ 3$.

Multiplicación de potencias de igual base. (Propiedad 1)
Para multiplicar dos o más términos que tienen la misma base, sume los exponentes

$$\boxed{\boldsymbol{a^m a^n a^{ñ} = a^{m+n+ñ}}}$$

Ejemplos:
$$5^2.5^3.5.5^2 = 5^{2+3+1+2} = 5^8 = 390625$$
$$x^5y^2y^4x^7x = x^{5+7+1}y^{2+6} = x^{13}y^8$$
$$(-7)^5(-7)^0(-7)^{-3}(-7)^3(-7)^{-1} = (-7)^{5+0-3+3-1} = (-7)^{8-4} = (-7)^4 = 2401$$

División de potencias de igual base. (Propiedad 2)
Para dividir dos términos que tienen la misma base, reste los exponentes, el mayor del menor, y el resultado se coloca donde este el exponente más grande.

$$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ si\ m > n} \qquad \textbf{con}\ \boldsymbol{a \neq 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}},\ si\ n > m} \qquad \textbf{con}\ \boldsymbol{a \neq 0}$$

Ejemplos:

$\frac{6^7}{6^2} = 6^{7-2} = 6^5 = 7776$

$\frac{(-\mathrm{x})^{11}}{(-\mathrm{x})^3} = (-\mathrm{x})^{11-3} = (-\mathrm{x})^8 = \mathrm{x}^8$

$\frac{\mathrm{y}^{-7}}{\mathrm{y}^{-2}} = \mathrm{y}^{-7-(-2)} = \mathrm{y}^{-7+2} = \mathrm{y}^{-5}$

$\frac{(3\mathrm{x})}{(3\mathrm{x})^4} = \frac{1}{(3\mathrm{x})^{4-1}} = \frac{1}{(3x)^3} = \frac{1}{27x^3}$

$\frac{5^3}{5^7} = \frac{1}{5^{7-3}} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}} = w^{1-1} = w^0 = 1$

Potencia por potencia. (Propiedad 3)

La base no se repite, se multiplican los exponentes de la base.

$$\boxed{(\boldsymbol{a^n})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a^{n \times m}}}$$

Ejemplos:

$(7^3)^5 = 7^{3\times 5} = 7^{15}$

$(x^4)^{-7} = x^{4\times -7} = x^{-28}$

$(6^2)^9 = 6^{2.9} = 6^{18}$

$(p^{-5})^{-6} = p^{-5\times -6} = p^{30}$

Potencia de un producto. (Propiedad 4)

Se le distribuye a cada factor el exponente.

$$\boxed{(\boldsymbol{ab})^{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{a^{m}.b^{m}}}$$

Ejemplos:

$(xy)^5 = x^5y^5$

$(x^4y^5)^3 = x^{4\times 3}\,y^{5\times 3} = x^{12}y^{15}$

$(3.2)^7 = 3^7 \,.\, 2^7$

$(3r^3p^{-5})^4 = 3^4r^{3.4}p^{-5.4} = 81r^{12}p^{-20}$

Potencia de un cociente. (Propiedad 5)

Se le distribuye a cada factor el exponente.

$$\boxed{\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{b^m}}}$$

Ejemplos:

$\left(\frac{3}{x}\right)^5 = \frac{3^5}{x^5} = \frac{243}{x^5}$

$\left(\frac{5y}{x^3}\right)^3 = \frac{5^3y^3}{x^{3.3}} = \frac{125y^3}{x^9}$

$\left(-\frac{x^7}{y^2}\right)^5 = -\frac{x^{35}}{y^{10}}$

$\left(-\frac{3x^3}{y^7}\right)^4 = \frac{81x^{12}}{y^{28}}$

Exponente cero (Propiedad 6)
Consideremos las siguientes situaciones

(a) $\frac{x}{x} = x^{1-1} = x^0$ Aplicando propiedad 2.

(b) $\frac{x}{x} = 1$ Aplicando simplificación.

De la situación (a) y de la (b), concluimos que: $\boldsymbol{x^0 = 1}$ Por lo tanto, **toda expresión elevada al exponente cero da como resultado 1**. Excepto cuando la base es 0.

$$\boldsymbol{a^0 = 1, \quad a \neq o}$$

OBSERVACIONES

- ***Si la base y el exponente son ceros el resultado no existe.***
- ***Si la base es cero y el exponente es cualquier número, el resultado es cero.***

Ejemplos:

$(2x)^0 = 1$

$\left(-\frac{6y}{x^4z}\right)^0 = 1$

$\frac{2}{(34x^2y^7)^0} = \frac{2}{1} = 2$

$-3x^0 = -3(1) = -3$

$(0)^0 = N.E. \quad No\ existe$

$(0)^{234} = 0$

1.5 NOTACIÓN EXPONENCIAL

La notación exponencial se utiliza para escribir multiplicaciones repetidas para facilitar un lenguaje que pueda simplificar muchas expresiones algebraicas.

Observe los siguientes ejemplos
Ejemplo 1

$$\mathbf{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

El 3 está repetido 9 veces, para simplificar esta operación se coloca la base, en este caso es “3” y esta base tendrá un exponente “9” que está representado por la cantidad de veces que se repite la base. Al final el resultado es $\mathbf{3^9}$**, esto se conoce como notación exponencial.**

Ejemplo 2

$\boldsymbol{xyxy^2x^3y^4}$

Si aplicamos la propiedad 1 para simplificar la expresión algebraica, se concluye que la letra **x** está repetida 5 veces y la letra **y** está repetida 7 veces, el resultado final y su forma exponencial es $\boldsymbol{x^5y^7}$**.**

Ejemplo 3

$$(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}(\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{5}})(\mathbf{2}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}})$$

Observe que la primera expresión esta elevada al cuadrado, por lo tanto,

$$(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y})(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y})(\mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{5}})(\mathbf{2}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}})$$

Luego,

$$(-)^{\mathbf{2}}(\mathbf{3})^{\mathbf{3}}(\mathbf{2})^{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x})^{\mathbf{7}}(\boldsymbol{y})^{\mathbf{9}}(\boldsymbol{z})^{\mathbf{4}}$$ Por la propiedad 1

Finalmente, $\mathbf{27.2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{9}}\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}} \quad = \quad \mathbf{54}\boldsymbol{x}^{\mathbf{7}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{9}}\boldsymbol{z}^{\mathbf{4}}$

ASIGNACIÓN Nº 1

I. Aplique propiedades de la potenciación. Escriba el nombre de la propiedad usada y exprese el resultado solamente en forma exponencial.

1. $3^7.3^2.3^4.3^3.3.3^2$
2. $(y^5z^4)^3$
3. $(x^5)^6$
4. $x^7x^2x^4x^4$
5. $\left(\frac{m^5}{n^6}\right)^6$
6. $(2xy^3)^0$
7. $\frac{n^5}{n^2}$
8. $(a^{2x-1})^5$
9. $\frac{3^4}{3^9}$
10. $7^{6a}.7^{5a}.7^{2a}$
11. $-\frac{25r^{11}}{5r^4}$
12. $\left(\frac{5x^7y}{2w^8}\right)^4$
13. $(-2x^{b-2})^3$
14. $(3.7.8)^7$
15. $-\frac{6y^{5b}}{12y^{9b}}$
16. $(12x^7)^5$
17. $(4x^2y^{3d})^3$
18. $(0x^2y^6)^7$
19. $-2^7.-2^6.-2^{-13}$
20. $\frac{-3^2}{-3^6}$
21. $10^4.10^3.10^7.10^0$
22. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
23. $-w^7 \div 3w^2$
24. $(7^4.3)^6$
25. $t.t.t.t.t.t.t.t.t$
26. $(0)^0$
27. $(3.7x^6)^p$
28. $\frac{5^{7m+4}}{5^{3m-2}}$
29. $n^2n^4(-n)^6.n^3$
30. $(0\,x^8y^4)^0$
31. $3x^6x^5x^{-3}x^0$
32. $\frac{3t^5}{6t^{-7}}$
33. $(4x^2)^{1/4}$
34. $(2x^0)^5$
35. $\frac{(3x)^4}{5y}$
36. $\left(\frac{3x}{5y}\right)^4$
37. $\frac{5r^{15}}{15r^5}$

88. $-4^5.-4^0.-4^{-4}$

39. $(0d^5c^7)^{1000}$
40. $b^{\frac{1}{6}}.b^{\frac{2}{3}}.b^{\frac{7}{2}}$
41. $\frac{c^{\frac{7}{5}}}{c^{\frac{1}{3}}}$
42. $\frac{5}{x^2x^4}$
43. $5^4(-5)^3$
44. $10^{10} \div 10^{10}$
45. $x^ax^bx^cx^dx$

II. Aplique las propiedades. Exprese en forma exponencial.

1. $-xy^5x^3y^2x^4x^5$
2. $(2x^5y^4)^2(3^2xy^2z^5)^4$
3. $(-s^2t^2)^2.(4s^2s\,t^5)$
4. $\frac{1}{2r^0}$
5. $[(2x^7y^3)^2]^4$
6. $\frac{x^3x^4y^2(-x^2x^5)^3}{x^6y^5}$
7. $[(5w^4s^9)^2]^2(s^4)^3$
8. $\frac{3^d.3^{6d}.3^{7d}}{3^{6d}.3^{9d}}$
9. $2x(y-1)^5(y+1)^2(y-1)^2 4x(y+1)^7$
10. $\frac{(2x-1)^2(3x-1)^4}{(2x-1)^3(3x-1)^3}$

III. Resuelva las siguientes potencias. exprese a la forma más simple.

1. $(-3x^2)^5$
2. $(-4xy^7)^4$
3. $\left(-\frac{2w^3}{3y^2}\right)^6$
4. $\left(-\frac{7xz^5}{2}\right)^3$
5. $\left(\frac{1}{4}t^5s\right)^4$
6. $(1{,}2\,m^3n^4)^3$
7. $(7\,x^{2a-1}y^{3b-2})^4$
8. $\left(-\frac{u^3v^8}{2u^5v^6}\right)^7$
9. $\left(-\frac{3n^{p-2}}{m^{r-5}}\right)^4$
10. $(-5^3s^7t)^4$

Unidad

2

Expresa con exponentes enteros positivos, exponentes enteros negativos, exponentes fraccionarios y viceversa, diferentes expresiones algebraicas.

EXPONENTES ENTERO NEGATIVO Y EXPONENTES FRACCIONARIOS

(3 DE AGOSTO AL 14 DE AGOSTO)

Los estudiantes de hoy día, se les hace un poco difícil comprender el concepto de número negativo y en muchos casos, el de número fraccionario. En esta nueva unidad analizaremos los procedimientos para expresar exponentes negativos y fraccionarios a exponentes positivos.

Observe la siguiente situación

$a^5 . a^{-5} = a^{5-5} = a^0 = 1,$ por la propiedad 6.

Como $a^5 . a^{-5} = 1$, para despejar a^5 se debe pasar a^{-5} dividiendo al 1. O sea,

$$a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$$

De este razonamiento, se desprende la siguiente definición:

Si $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo y $\boldsymbol{a}$ un número real, $\boldsymbol{a \neq o}$.

Entonces,

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

De igual manera,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$x^7 = \frac{1}{x^{-7}}$ $\qquad$ $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ $\qquad$ $\frac{1}{d^{-10}} = d^{10}$

$-7^3 = -\frac{1}{7^{-3}}$ $\qquad$ $\frac{1}{2^{-5}} = 2^5 = 32$ $\qquad$ $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

2.1 TRANSFORMACIÓN DE EXPONENTES NEGATIVOS A POSITIVOS Y VICEVERSA

REGLA:

Cualquier factor de un término puede pasarse del numerador al denominador y viceversa, si se le cambia el signo del exponente de dicho factor.

Ejemplo 1:
Exprese con exponentes positivos y simplifique.

$$\frac{wx^{-3}y}{3w^4x^{-7}y^{-4}}$$

Solución:
Como lo dice la indicación, hay que expresar con exponentes positivos, solamente se debe alterar aquellos factores(números o letras) que tengan el exponente negativo.
Es decir, los factores $x^{-3}, x^{-7}y^{-4}$ **deben pasar a positivos y cambiarlos del numerador al denominador y viceversa, según cada caso.**
De la siguiente manera:

$\frac{wx^7yy^4}{3w^4x^3}$ **(Observe que todos quedaron positivo. A demás, cambiaron de posición)**

Ahora se procede a simplificar. Aplicando las propiedades de la potenciación.
Se aplica la propiedad del cociente en los factores de “w” y “x” y la propiedad del producto en el factor “y”, se tiene que:

$\frac{x^{7-3}y^{1+4}}{3w^{4-1}}$ Se realiza la operación donde aparezca el factor con exponente más grande.

$\frac{x^4y^5}{3w^3}$ **Observe que solo debe quedar un factor de cada letra o número.**

Ejemplo 2:

Exprese los factores literales con exponentes negativos y simplifique.

$$\frac{wx^{-3}y}{3w^4x^{-7}y^{-4}}$$

Solución:
La indicación dice expresar las letras con exponentes negativos, se deben alterar de posición solamente aquellos factores literales (letras) que tengan los exponentes positivos. O sea, w, y, w^4

De la siguiente manera:

$$\frac{w^{-4}x^{-3}}{3w^{-1}x^{-7}y^{-1}y^{-4}}$$

Ahora se procede a simplificar, aplicando propiedades de la potenciación

$$\frac{w^{-4+1}}{3x^{-7+3}y^{-1-4}}$$ Se realiza la operación donde aparezca el factor con exponente más pequeño.

$$\boldsymbol{\frac{w^{-3}}{3x^{-4}x^{-5}}}$$

Ejemplo 3:

Exprese sin denominador y simplifique.

$$\boldsymbol{\frac{mn^{-5}p^{-6}}{mn^{-7}p^{-7}q^{-1}}}$$

Solución:

Según la indicación, en la parte de abajo (denominador) no debe quedar ningún factor, todos pasan al numerador.

$$mn^{-5}p^{-6}.m^{-1}n^{7}p^{7}q$$

Observe que al pasar para el numerador se le cambia el signo al exponente de cada factor.

Luego aplicando propiedades de la potenciación. Se tiene que

$$m^{1-1}n^{-5+7}p^{-6+7}q$$

$$= m^{0}n^{2}p^{1}q$$

$\boldsymbol{= n^{2}pq}$ puesto que, $m^{0} = 1$

Ejemplo 4

Exprese sin denominador y simplifique.

$$\frac{\boldsymbol{ab^2}}{\boldsymbol{3^{-3}a^5b^{-6}}}$$

Solución:

$3^3a^{-5}b^6ab^2$	Se pasan los factores del numerador al denominador y se le cambia el signo al exponente de los factores del denominador.
$27a^{-5+1}b^{6+2}$	Aplicando propiedades de la potenciación.
$\boldsymbol{27a^{-4}b^8}$	Es la solución.

Ejemplo 5

Exprese con exponentes positivos y simplifique

$$\frac{\boldsymbol{x^{-\frac{7}{3}}y^{-\frac{2}{3}}z}}{\boldsymbol{x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{8}}}}$$

Solución:

$$\frac{x^{\frac{2}{5}}z}{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{1}{6}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{8}}}$$

Se pasan los factores con exponentes negativos a positivos, pasándolos del numerador al denominador y viceversa.

$$\frac{x^{-\frac{29}{15}}z^{\frac{7}{8}}}{y^{\frac{5}{6}}}$$

x = $\frac{2}{5}-\frac{7}{3}= \frac{6-35}{15}=-\frac{29}{15}$

y = $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}= \frac{1+4}{6}= \frac{5}{6}$

z = $1-\frac{1}{8}= \frac{8-1}{8}= \frac{7}{8}$

$$\frac{\boldsymbol{z^{\frac{7}{8}}}}{\boldsymbol{x^{\frac{29}{15}}y^{\frac{5}{6}}}}$$

Se pasa el factor “x” a positivo por la indicación dada.

2.2 EXPONENTE FRACCIONARIO

Es una operación que proviene de la radicación. En esta operación el factor que está dentro del signo del radical, tiene exponente que no es divisible por el índice del radical. De lo anterior, se concluye que: Toda raíz es una potencia con exponente fraccionario; en donde el numerador del exponente fraccionario representa el exponente del radicando (lo que está dentro del signo radical) y el denominador del exponente fraccionario representa al índice del signo radical. O sea:

$$\boxed{\boldsymbol{x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^{a}}}}$$

Podemos señalar que la potenciación es una operación inversa de la radicación.

Ejemplos:

$x^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{x^2}$, $w^{\frac{3}{8}}x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[8]{w^3}\sqrt[4]{x^5}$, $3y^{\frac{7}{9}} = 3\sqrt[9]{y^7}$, $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$

Para familiarizarte más sobre este tema, es importante que conozcas las propiedades de la radicación. En esta sección sólo se enunciarán las leyes o propiedades de la radicación, en la unidad siguiente se ampliará el concepto de radicación y sus operaciones.

2.3 PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Si a y b son números reales, tales que para ambos existen las raíces m-ésima y n-ésima, respectivamente, donde m y n son números reales, se cumple que:

a. $\sqrt[m]{a.b} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$ Raíz de un producto $\sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y}$

b. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad b \neq 0$ Raíz de un cociente $\sqrt[4]{\frac{x^5}{y^6}} = \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{y^6}}$

c. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$ Potencia de una raíz

$(\sqrt[5]{x^3y^2})^2 = \sqrt[5]{(x^3y^2)^2} = \sqrt[5]{x^6y^4}$

d. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ Raíz de una raíz $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7p}} = \sqrt[4.3]{7p} = \sqrt[12]{7p}$

Ejemplo 1

Exprese con exponentes positivos y signo radical.

$$\boldsymbol{w x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{2}{3}} z^{\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{6}}}$$

Solución:

$$= \frac{w x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{6}}}$$

Se cambian todos los factores con exponentes negativos a positivos, aplicando la regla establecida.

$$= \frac{w x^{\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{5}{6}}}$$

Se reducen los exponentes del factor "y", sumando ambas fracciones.

$$= \frac{w \sqrt[4]{x}\, \sqrt[4]{z^3}}{\sqrt[6]{y^5}}$$

Por definición de exponente fraccionario.

$$= \boldsymbol{\frac{w \sqrt[4]{x z^3}}{\sqrt[6]{y^5}}}$$

Por la propiedad ***a*** de la radicación.

Ejemplo 2

Exprese con exponentes positivos y signo radical.

$$\boldsymbol{\frac{3 a^{-\frac{2}{7}} b^{\frac{7}{9}}}{12 c^{-\frac{1}{9}} d^{\frac{3}{7}} e^{-1}}}$$

Solución:

$$= \frac{b^{\frac{7}{9}} c^{\frac{1}{9}} e}{4 a^{\frac{2}{7}} d^{\frac{3}{7}}}$$

Se pasan los factores con exponente negativos a positivos. Y se simplifica el 3 y el 12.

$$= \frac{e \sqrt[9]{b^7}\ \sqrt[9]{c}}{4\ \sqrt[7]{a^2}\ \sqrt[7]{d^3}}$$

Por definición de exponente fraccionario.

$$= \boldsymbol{\frac{e \sqrt[9]{b^7 c}}{4\ \sqrt[7]{a^2 d^3}}}$$

Por la propiedad ***a*** de la radicación.

Ejemplo 3: Exprese con exponentes positivos y simplifique.

$$\frac{\sqrt[7]{x^{-5}yz^{-4}}}{2\sqrt[3]{nm^{-1}}}$$

Solución

$$=\frac{x^{-\frac{5}{7}}y^{\frac{1}{7}}z^{-\frac{4}{7}}}{2n^{\frac{1}{3}}m^{-\frac{1}{3}}}$$

Se aplica la definición de exponente fraccionario y la propiedad ***a*** de la radicación.

$$=\frac{m^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{7}}}{2n^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{7}}z^{\frac{4}{7}}}$$

Se pasan los factores de exponentes negativos a positivos.

Ejemplo 4: Exprese con exponentes positivos y simplifique.

$$\frac{4\sqrt[5]{2p^{-1}s^2t^{-3}}}{18\sqrt[5]{pr^{-2}}\sqrt[4]{p^{-3}s}}$$

$$=\frac{2.\,2^{\frac{1}{5}}p^{-\frac{1}{5}}s^{\frac{2}{5}}t^{-\frac{3}{5}}}{9p^{\frac{1}{5}}r^{-\frac{2}{5}}p^{-\frac{3}{4}}s^{\frac{1}{4}}}$$

Se aplica la definición de exponente fraccionario, la propiedad ***a*** de la radicación y se simplifican los valores numéricos.

$$=\frac{2.\,2^{\frac{1}{5}}p^{\frac{3}{4}}r^{\frac{2}{5}}s^{\frac{2}{5}}}{9p^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}}s^{\frac{1}{4}}t^{\frac{3}{5}}}$$

Se pasan los factores de exponentes negativos a positivos.

$$=\frac{2^{\frac{6}{5}}p^{\frac{7}{20}}r^{\frac{2}{5}}s^{\frac{3}{20}}}{9t^{\frac{3}{5}}}$$

Se simplifica aplicando las propiedades de la potenciación.

Factor 2 : $1+\frac{1}{5}=\frac{5+1}{5}=\frac{6}{5}$

Factor p: $\frac{3}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3(5)-1(4)-1(4)}{20}$

$\frac{15-4-4}{20}=\frac{15-8}{20}=\frac{7}{20}$

Factor s: $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{2(4)-1(5)}{20}=\frac{8-5}{20}=\frac{3}{20}$

Ejemplo 5: Exprese con exponentes positivos y simplifique.

$$\frac{\sqrt[5]{32x^{-2}y^4}}{2\sqrt[5]{x^3y^{-1}}}$$

$$=\frac{32^{\frac{1}{5}}x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{4}{5}}}{2x^{\frac{3}{5}}y^{-\frac{1}{5}}}$$

Se aplica la definición de exponente fraccionario, la propiedad ***a*** de la radicación.

$$= \frac{(2^5)^{\frac{1}{5}} y^{\frac{4}{5}} y^{\frac{1}{5}}}{2x^{\frac{2}{5}} x^{\frac{3}{5}}}$$

Se pasan los factores de exponentes negativos a positivos y se descompone el 32 en factores primos

$$= \boldsymbol{\frac{y}{x}}$$

Se aplican las propiedades de la potenciación y se simplifica.

2.4 VALORES NUMÉRICOS DE EXPRESIONES CON EXPONENTES NEGATIVOS, FRACCIONARIOS Y RADICALES

En esta sección determinaremos el valor de algunas expresiones con exponentes positivos y fraccionarios. Es importante recordar la descomposición factorial y la utilización de números primos para facilitar los resultados.

Ejemplos:

Determine el valor de las expresiones dadas.

Ejemplo 1

$$\boldsymbol{(32)^{\frac{1}{5}}}$$

$$= (2^{\cancel{5}})^{\frac{1}{\cancel{5}}}$$

Se descompone en factores primos.

32 = 2.2.2.2.2 $=2^5$ 5 veces.

= 2

Se simplifica

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{(125)^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{(125)^{\frac{1}{3}}}$$

Se expresa con exponentes positivos.

$$= \frac{1}{(5^3)^{\frac{1}{3}}}$$

Se descompone en factores primos.

125= 5.5.5 = 5^3 3 veces

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

Se simplifica.

Ejemplo 3

$$\boldsymbol{27^{\frac{2}{3}}.\,128^{\frac{1}{7}}.\,(-216)^{-\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{27^{\frac{2}{3}}.\,128^{\frac{1}{7}}}{(-216)^{\frac{1}{3}}}$$

Se pasan los factores con exponentes positivos a negativos.

$$= \frac{(3^3)^{\frac{2}{3}}(2^7)^{\frac{1}{7}}}{(-2^3.\,3^3)^{\frac{1}{3}}}$$

Se descompone en factores primos.

$$= \frac{(3)^2(2)}{-2.\,3}$$

Se simplifican los exponentes.

$$= -3$$

Se simplifica.

ASIGNACIÓN Nº 2

I parte: Exprese con exponentes positivos y simplifique.

1. $2x^{-4}y^{-5}$
2. $\frac{x^{-7}y^{-8}z}{x^{3}y^{-7}z^{-5}}$
3. $\frac{5m^{-4}n^{-2}}{10m^{-3}n}$
4. $\frac{a^{-3}b^{-5x}c^{-6}}{a^{-2}b^{4x}c^{-8}}$
5. $\left(\frac{x^{5}y^{2}z^{-1}}{a^{2}b^{2}c^{-2}}\right)\left(\frac{a^{-2}y^{-2}c^{-3}}{x^{-3}b^{-2}z^{-4}}\right)$
6. $\left(\frac{m^{-3}n^{-2}p^{3}}{m^{4}n^{-3}}\right)^{2}\left(\frac{m^{5}n^{2}}{n^{-2}p^{-4}}\right)^{-2}$
7. $\frac{x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{7}{6}}y^{-\frac{1}{8}}z^{-\frac{3}{10}}}$
8. $\frac{x^{-\frac{1}{5}}s^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{5}{7}}}{x^{-\frac{1}{4}}s^{\frac{3}{5}}t^{-\frac{3}{2}}}$

II parte: Exprese con signo radical, exponentes positivos y simplifique.

1. $x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{2}{3}}$
2. $6r\,a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{1}{8}}c^{-\frac{3}{9}}$
3. $5^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{5}}$
4. $\frac{r^{\frac{2}{3}}s^{-\frac{8}{7}}t^{\frac{1}{7}}}{r^{\frac{1}{6}}s^{-2}t^{-\frac{2}{7}}}$
5. $\frac{5m^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{12}}p^{-\frac{1}{8}}}{m^{-\frac{3}{2}}n^{-\frac{3}{4}}p^{-\frac{3}{4}}}$
6. $2^{\frac{3}{7}}x^{\frac{1}{9}}z^{-\frac{1}{2}}$

III parte: Exprese con exponente fraccionario, positivo y simplifique.

1. $\sqrt[3]{y}.\sqrt{z}$
2. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{xy^{3}}$
3. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}x^{-1}y^{-2}}$
4. $\frac{x^{-1}y^{-1}\sqrt{x^{-3}y^{-1}}}{\sqrt{x^{-5}y^{-3}}}$
5. $\sqrt[4]{x^{3}}\ \sqrt[3]{8^{2}y^{-2}}$
6. $\frac{\sqrt{2^{-1}x}\ \sqrt[6]{w^{15}y^{-2}}}{\sqrt[4]{w^{2}x^{-2}y}}$

VI parte: Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones.

1. $(49)^{-\frac{3}{2}}$
2. $(-32)^{-\frac{2}{5}}$
3. $(64)^{-\frac{1}{3}}\,(128)^{\frac{2}{7}}$
4. $(1024)^{\frac{3}{5}}(36)^{-\frac{1}{2}}(1296)^{-\frac{3}{4}}(27)^{\frac{2}{3}}$

Unidad

3

Aplica las reglas de la radicación en la simplificación, amplificación y reducción al mínimo común índice de radicales en diferentes ejercicios con expresiones algebraicas.

LA RADICACIÓN

(17 DE AGOSTO AL 26 DE AGOSTO)

3.1 CONCEPTO

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Es decir, debe cumplir:

$$(a)^n = b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{b} = a$$

$n > 1,\ n \in N\ y\ a, b\ son\ números\ reales\ positivos.$

La radicación se denota por el simbolismo $\sqrt{}$, y se llama **signo del radical**. Lo que está bajo o dentro del radical se conoce con el nombre de **radicando o cantidad subradical,** el número que se coloca en la abertura del signo de radical se llama **índice** y determina el grado del radical, cuando el índice es dos, se omite o no se coloca. El resultado de la radicación se llama **raíz.**

En general, la raíz enésima (de índice n) de un número es uno de sus n factores iguales.

$$\sqrt[n]{b} = a$$

Donde, ***n*** es el índice del radical, ***b*** el radicando y ***a*** la raíz.

La radicación es una operación que consiste en buscar una expresión, llamada **raíz**, que al multiplicarla las veces del **índice**, da como resultado el **radicando o cantidad subradical.**

Ejemplos

$\sqrt[3]{27x^3} = 3x$, si se multiplica $3x$ las veces del índice 3, entonces (3x)(3x)(3x) = $27x^3$. O sea, el radicando.

$\sqrt[4]{16z^4} = 2z$, si se multiplica $2z$ las veces del índice 4, entonces (2z)(2z)(2z)(2z) = $16z^4$. O sea, el radicando.

Cuando la raíz es exacta se llama **racional** y en caso contrario, **irracional.**

Ejemplos

$\sqrt{\boldsymbol{4x^2}} = \boldsymbol{2x}$**,** tiene raíz exacta y es racional, $\sqrt{\boldsymbol{5x}}$ es inexacta y es irracional.

3.2 LEY DE LOS SIGNOS

1. Si el índice es impar, la raíz lleva el signo del radicando. **(Regla 1)**

2. Si el índice es par y el radicando positivo, la respuesta tiene dos signos uno positivo y otro negativo. **(Regla 2)**

3. Si el índice es par y el radicando negativo, no hay solución en los números reales, o sea, NO EXISTE. **(Regla 3)**

Ejemplos:

$\sqrt[5]{-32} = -2$ **(Regla 1)**

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ = +3 y -3 **(Regla 2)**

$\sqrt[5]{32} = 2$ **(Regla 1)**

$\sqrt[4]{-81} = N.E.$ **(Regla 3)**

3.3 SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Para simplificar radicales existen una serie de pasos a seguir pero, se debe tomar en cuenta algunas observaciones:

a. Ningún factor del radicando puede tener exponente mayor o igual que el índice.
b. Ningún radical puede aparecer en el denominador.
c. Ninguna fracción debe estar dentro de un radical.
d. Cuando dentro del signo radical no queda nada, el radical desaparece.

3.3.1. SIMPLIFICACIÓN DE FACTORES

PROCEDIMIENTO

1. Se descompone en factores primos los números del radicando.
2. Se agrupan los factores primos en forma exponencial, el exponente de esta agrupación debe ser igual al índice del radical. No importa si la descomposición al final no sea exacta.
3. Aquellos factores que tengan el exponente igual al índice, se les elimina el exponente y salen del radical, no importa si los factores se repiten varias veces. (el resto permanece dentro del radical).
4. Se reduce o simplifica si es necesario.

PARA RECORDAR

Se llama **factores** a los números y letras separados por el signo de multiplicación.
Ejemplo:
$3tw^4$ =3 factores $4pqr$ = 4 factores $6xyzw$ = 5 factores
El signo de multiplicación es el único que puede ser invisible cuando se trata de letras.

Ejemplo: Indice

Simplificar $\frac{1}{2xy^2}\sqrt[4]{32x^{14}y^{13}}$

Primero se descompone el número 32 en números primos. (PASO 1)

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$2^4.2$ en forma exponencial

Se agrupa en forma exponencial de modo que el exponente sea igual al índice.

En este caso, el 2 se agrupa cada cuatro porque el índice es 4. No importa si la agrupación es incompleta (PASO 2)

Las letras se agrupan de acuerdo al índice. Como el índice es 4, se agrupan cada cuatro hasta que la suma llegue a 14.

$x^{14} = x^4x^4x^4x^2$ Observe que al final la cantidad no fue exacta.

$y^{13} = y^4y^4y^4y$ Observe que al final sólo sobró una "y"

Luego, $\frac{1}{2xy^2}\sqrt[4]{2^4.2\,x^4x^4x^4x^2y^4y^4y^4y}$, se coloca cada descomposición dentro del radical.

Ahora, sale del radical todos los factores, aunque se repitan, que tengan el exponente igual al índice. Recuerde que debe eliminarle el exponente antes de sacarlo del radical.

$\frac{2.x.x.x\ y.y.y}{2xy^2}\sqrt[4]{2x^2y}$, (PASO 3)

Finalmente, se simplifica si es necesario y el resultado es: $\boldsymbol{x^2y}\ \sqrt[4]{\boldsymbol{2x^2y}}$ (PASO 4)

Ejemplo 2

$\boldsymbol{\frac{3t}{2w}}\sqrt[5]{\boldsymbol{384t^{17}w^{23}}}$

384 = 2.2.2.2.2.2.2.3 = $2^5.2.2.3$ (descomposición del número)

$t^{17} = t^5t^5t^5t^2$ (se descompone el 17 de 5 en 5 porque el índice es 5, al final sobran 2)

$w^{23} = w^5w^5w^5w^5w^3$ (se descompone el 23 de 5 en 5 porque el índice es 5, al final sobran 3)

$\frac{3t}{2w}\sqrt[5]{2^5.2.2.3\ t^5t^5t^5t^2w^5w^5w^5w^5w^3}$ (se coloca toda la descomposición dentro del radical)

$= \frac{3t}{2w} .2.t.t.t.w.w.w.w \sqrt[5]{2.2.3\ t^2w^3}$ (PASO 3)

$= \frac{3t}{2w} .2.t^3w^4 \sqrt[5]{12\ t^2w^3}$ $=$ $\mathbf{3.t^4w^3 \sqrt[5]{12\ t^2w^3}}$

También se puede descomponer los factores de forma que el exponente de cada uno de ellos tengan un divisor común con el índice, se dividen estos números (el exponente entre el índice) y el resultado será el exponente del factor que sale del radical.

Ejemplo.

$\frac{3x^2y^2}{5w} \sqrt[3]{\frac{750w^{10}s^{17}}{729x^6y^{24}}}$

750 = 2.3.5.5.5 = 2.3.5^3 729 = 3.3.3.3.3.3 = 3^6

$w^{10} = w^9.w$ $s^{17} = s^{15}.s^2$

$x^6 = x^6$ $y^{24} = y^{24}$

$= \frac{3x^2y^2}{5w} \sqrt[3]{\frac{2.3.5^3w^9.w.s^{15}.s^2}{3^6x^6y^{24}}}$

$= \frac{3x^2y^2.5w^3s^5}{5w.\ 3^2x^2y^8} \sqrt[3]{2.3.w.s^2}$

Se divide el exponente de cada factor que tenga un divisor común con el índice, el resultado de la división es el exponente del factor que sale del radical.

$= \frac{s^5w^2}{3y^6} \sqrt[3]{\mathbf{6ws^2}}.$ Se simplifica.

3.3.2. SIMPLIFICACIÓN DE TÉRMINOS

Para simplificar términos se utilizan los casos de factorización.

PROCEDIMIENTO

1. Se factoriza.
2. Se agrupan los factores en forma exponencial, el exponente de esta agrupación debe ser igual al índice del radical. Por lo general, los factores son binomios.
3. Aquellos factores que tengan el exponente igual al índice, se les elimina el exponente y salen del radical. (el resto permanece dentro del radical).
4. Se reduce o simplifica si es necesario.

PARA RECORDAR

Se llama **términos** a los números y letras separados por los signos de más (+) o menos (-).
Ejemplo:
$3t + w^4$ 2 términos $4p + q - r$ 3 términos

Ejemplos:

Simplificar $\sqrt[3]{(9x^2-16y^2)(9x^2+24xy+16y^2)}$ — $9x^2-16y^2=(3x-4y)(3x+4y)$ Diferencia de cuadrados

$=\sqrt[3]{(3x-4y)(3x+4y)(3x+4y)^2}$ — $9x^2+24xy+16y^2=(3x+4y)^2$ Trinomio cuadrado perfecto

$=\sqrt[3]{(3x-4y)(3x+4y)^3}$ — Se agrupan de acuerdo al índice.

$=(3x+4)\ \sqrt[3]{(3x-4y)}.$ — Se simplifica.

Simplificar $\frac{3}{2t}\ \sqrt[4]{80s^5t^4-96s^4t^6}$ — $80s^5t^4-96s^4t^6=\ 16s^4t^4(5s-6t^2)$

$=\frac{3}{2t}\ \sqrt[4]{16s^4t^4(5s-6t^2)}$ — Factor común monomio

$=\frac{3}{2t}\ \sqrt[4]{2^4s^4t^4(5s-6t^2)}$ — Se descompone el factor 16

$=\frac{3.2.s.t}{2t}\ \sqrt[4]{(5s-6t^2)}$ — Salen del radical los factores 2, s, t.

$=3s\ \sqrt[4]{5s-6t^2}$ — Se simplifica.

ASIGNACIÓN Nº 3.1

I. Simplifique los factores de los radicales dados.

1. $\sqrt[5]{32x^{10}}$
2. $\sqrt[4]{48x^5}$
3. $\sqrt[7]{-128y^{14}}$
4. $3xy\ \sqrt[6]{3645x^{13}y^{11}}$
5. $\sqrt[3]{-432a^6b^5c^4}$
6. $\frac{7h}{5}\ \sqrt{6300f^9h^{12}g^7}$
7. $\sqrt{768m^5n^7}$
8. $\sqrt[12]{1296c^{16}d^8}$
9. $\frac{5}{7}\ \sqrt[3]{\frac{1512r^7s^4}{125x^3}}$
10. $\sqrt[15]{343x^6}$

II. Simplifique los radicales que contienen varios términos.

1. $\sqrt[3]{(t-2)^9}$
2. $\sqrt[4]{(2p-r)^{10}}$
3. $\sqrt[3]{54s^4-108s^3t}$
4. $\sqrt[15]{(3x-7)^3}$
5. $\sqrt[3]{(x+2)(x^2-4)(x^2+5x+6)}$
6. $\sqrt{(27x^3-18x^2)(6x^2+11x-10)}$

7. 4 AMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Una cantidad se puede introducir; como factor, dentro del signo radical, siempre y cuando se le coloque un exponente, a toda cantidad introducida, igual al índice del radical. Es decir,

$$a\ =\ \sqrt[n]{(a)^n}$$

Nota: se dice que un radical es entero cuando su coeficiente es 1.

Ejemplos:

Amplifique los siguientes radicales:

$2\ \sqrt[4]{7}$	$= \sqrt[4]{7.(2)^4}$	Por definición.
	$= \sqrt[4]{7.\ 16}$	Resolviendo la potencia.
	$= \sqrt[4]{112}$	Multiplicando.
$6x\ \sqrt[3]{2x}$	$= \sqrt[3]{2x(6x)^3}$	Por definición.
	$= \sqrt[3]{2x.216x^3}$	Resolviendo la potencia.
	$= \sqrt[3]{432x^4}$	Multiplicando y propiedad.
$\frac{y^2}{3}\ \sqrt[4]{12y^7}$	$= \sqrt[4]{12y^7\left(\frac{y^2}{3}\right)^4}$	Por definición.
	$= \sqrt[4]{3.4y^7.\frac{y^8}{3^4}}$	Resolviendo potencia.
	$= \sqrt[4]{\frac{4}{27}y^{15}}$	Simplificando dentro del radical.
$\frac{x+y}{x-y}\ \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}$	$= \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}.\frac{(x+y)^3}{(x-y)^3}}$	Por definición
	$= \sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}$	Simplificando dentro del radical.
$(2x+3)\sqrt{\frac{5x-1}{3+2x}}$	$= \sqrt{\frac{5x-1)(2x+3)^2}{3+2x}}$	Por definición.
	$= \sqrt{(5x-1)(2x+3)}$	Simplificando dentro del radical.
	$= \sqrt{10x^2+13x-3}$	Producto notable.

ASIGNACIÓN Nº 3.2

Haga enteros los radicales dados.

1. $3\sqrt[3]{8}$
2. $6x\sqrt{y}$
3. $5z\sqrt[3]{2}$
4. $4^2\sqrt[3]{x}$
5. $x^2y^3z^4\sqrt[7]{xyz^2}$
6. $x^2\sqrt[3]{x-1}$
7. $(x-2)^5\sqrt[3]{\frac{1}{(x-2)^{14}}}$
8. $(x-7)\sqrt{(x-7)}$
9. $7(x-5)\sqrt{\frac{1}{x-5}}$
10. $2(a-b)\sqrt[3]{(a-b)}$

7.5 MÌNIMO COMÚN ÍNDICE (m.c.i.)

En muchas situaciones los radicales no tienen el mismo índice, por lo que es necesario realizar una operación llamada reducción del mínimo común índice.

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR EL M.C.I.

1. Se halla el mínimo común de los índices, éste es el m.c.i. de todos los radicales.
2. Se divide el índice común, hallado en el paso 1, entre el índice de cada radical.
3. El radicando, de cada radical, debe llevar un exponente igual al resultado hallado en el paso 2 y cada uno de estos radicales deben tener como índice el m.c. i.
4. Cuando uno de los radicales tiene, coincidencialmente, el mismo índice que el índice común, se deja tal cual.
5. Se simplifica.

Ejemplos:

Reduzca el mínimo común índice

$\sqrt[9]{5x^7y^2}$, $\quad 6\sqrt[3]{x^5y^4z^8}$, $\quad \sqrt[6]{3x^5y^3z}$

Solución:

El m.c.m de 9, 3 y 6 es 18. (PASO 1)

Luego, $18 \div 9 = 2,\quad 18 \div 3 = 6,\quad 18 \div 6 = 3$ (PASO 2)

$\sqrt[18]{(5x^7y^2)^2}$, $6\sqrt[18]{(x^5y^4z^8)^6}$, $\sqrt[18]{(3x^5y^3z)^3}$ (PASO 3)

$\boldsymbol{\sqrt[18]{25x^{14}y^4}}$, $\boldsymbol{6\sqrt[18]{x^{30}y^{24}z^{48}}}$, $\boldsymbol{\sqrt[18]{27x^{15}y^9z^3}}$ (PASO 5)

Reduzca el mínimo común índice

$\sqrt[3]{3a^2b^3}$, $\sqrt[6]{5a^2b^5}$, $\sqrt{6a^5b^3}$, $\sqrt[3]{7ab^6}$

Solución:

El m.c.m de 3, 6, 2 y 3 es 6. (PASO 1)

Luego, $6 \div 3 = 2$, $6 \div 6 = 1$, $6 \div 2 = 3$, $6 \div 3 = 2$ (PASO 2)

$\sqrt[6]{(3a^2b^3)^2}$, $\sqrt[6]{5a^2b^5}$, $\sqrt[6]{(6a^5b^3)^3}$, $\sqrt[6]{(7ab^6)^2}$ (PASO 3 y 4)

$\sqrt[6]{\boldsymbol{9a^4b^6}}$, $\sqrt[6]{\boldsymbol{5a^2b^5}}$, $\sqrt[6]{\boldsymbol{216a^{15}b^9}}$, $\sqrt[6]{\boldsymbol{49a^2b^{12}}}$ (PASO 5)

ASIGNACIÓN Nº 3.3

Reduzca al mínimo común índice los siguientes radicales.

1. $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{9}$,
2. $\sqrt[6]{15}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[12]{534}$
3. $\sqrt[12]{n^2m^3p^5}$, $\sqrt[24]{x^4y^{11}z^3}$, $\sqrt[6]{2ab^2c^7}$
4. $\sqrt[15]{5x^6y^4z^5}$, $\sqrt[3]{3x^9y^3z^8}$, $\sqrt[5]{r^6s^4}$
5. $\sqrt[3]{x^7y^2z^6}$, $\sqrt[6]{5a^5b^7c^4}$, $\sqrt[8]{7w^6x^4y}$, $\sqrt[4]{m^3n^6}$
6. $5\ \sqrt[6]{m^{10}n^{20}}$, $\sqrt[3]{10x^4y^7z^{11}}$, $\sqrt{5\ d^7h^{11}k}$, $\sqrt[6]{x^{33}y^{44}}$
7. $\sqrt[15]{xy^{14}z^{34}}$, $\sqrt[45]{x^6y^8z^7}$, $\sqrt[3]{x^{13}y^5}$, $\sqrt[9]{x^{18}y^{27}z}$

7.6 RADICALES SEMEJANTES

Dos o más radicales son semejantes si tienen exactamente igual el índice e igual radicando y difieren en el coeficiente.

Ejemplos:

$7\sqrt[3]{5}$, $-8\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}$ Son radicales semejantes por definición.

$\frac{x}{2}\ \sqrt[5]{3x^2}$, $7y\ \sqrt[5]{3x^2}$, $\sqrt[5]{3x^2}$, $0{,}23\sqrt[5]{3x^2}$ Tienen el índice y el radicando iguales.

$-7x\sqrt{ab}$, $\frac{2}{5}x\sqrt{ab}$, $-x\sqrt{ab}$ Tienen en común $x\sqrt{ab}$.

PROCEDIMIENTO

1. Se suman o restan los coeficientes.
2. Al resultado obtenido se le coloca, de forma inmediata, el radical común.

Ejemplos:

Reduzca:

$5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$= (5 - 4 + 1 - 6)\sqrt{2}$

$= (6 - 10)\sqrt{2}$

$= \mathbf{-4\sqrt{2}}$

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{xy^2} - \frac{7}{6}\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{xy^2}$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{6} + 1\right)\sqrt[3]{xy^2}$

$= \left(\frac{2-7+6}{6}\right)\sqrt[3]{xy^2}$

$= \mathbf{\frac{1}{6}\sqrt[3]{xy^2}}$

ASIGNACIÓN Nº 3.4

Reduzca los radicales semejantes.

1. $3\sqrt{10} - 5\sqrt{10}$
2. $2\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
3. $\sqrt{11} + \sqrt{11} + \sqrt{11} + \sqrt{11}$
4. $8\sqrt{s} + 5\sqrt{s}$
5. $6\sqrt{xy} - 3\sqrt{xy} - 14\sqrt{xy} + 11\sqrt{xy}$
6. $-\sqrt{2a} - 11\sqrt{2a} - 9\sqrt{2a} + 4\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a}$
7. $4a\sqrt[3]{w} + 6a\sqrt[3]{w} + 8a\sqrt[3]{w} + 10b\sqrt[3]{w}$
8. $3a\sqrt[3]{5y} + 2b\sqrt[3]{5y} - 5a\sqrt[3]{5y} - 4b\sqrt[3]{5y}$
9. $6x^2\sqrt{xy^2} - x^2\sqrt{xy^2} + 5x^2\sqrt{xy^2} - 21x^2\sqrt{xy^2}$
10. $5y^3\sqrt{x} - 34y^3\sqrt{x} - 4y^3\sqrt{x}$

Unidad 4

Resuelve operaciones de suma, resta, multiplicación, división, racionalización, potenciación y radicación en expresiones con radicales.

OPERACIONES CON RADICALES

(DEL 27 DE AGOSTO AL 16 DE SEPT.)

4.1 SUMA Y RESTA CON RADICALES

PROCEDIMIENTO

1. Se descomponen los radicales en factores primos si es necesario.
2. Se sacan los factores cuyos exponentes sean igual al índice de la raíz.
3. Se reducen los radicales semejantes.
4. Los radicales no semejantes bajan con el signo que llevan.

Ejemplos:

Encuentre la solución de:

$7\sqrt{2x} - 8\sqrt{2x} + 4\sqrt{2x} - 5\sqrt{2x}$

Solución:

$= (7 - 8 + 4 - 5)\sqrt{2x}$

$= (11 - 13)\sqrt{2x}$

$\boldsymbol{= -2\sqrt{2x}}$

Paso 3

Se sumaron los positivos y se sumaron los negativos.

Se restaron los coeficientes y se colocó el signo del mayor.

$3x\sqrt[3]{4y^2} - 2x\sqrt[3]{4y^2} - 7x\sqrt[3]{4y^2} + 6x\sqrt[3]{4y^2}$

$= (3 - 2 - 7 + 6)x\sqrt[3]{4y^2}$

$= (9 - 9)\, x\sqrt[3]{4y^2}$

= **0**

Paso 3

Se sumaron los positivos y se sumaron los negativos.

Se restaron los coeficientes

$\sqrt{45} \;-\sqrt{80} \;-\sqrt{180}-\;\sqrt{125}$

$=\sqrt{3^2.5}\;-\sqrt{2^2.2^2.5}-\sqrt{2^2.3^2.5}-\;\sqrt{5^2.5}$	Paso 1
$=3\sqrt{5}-2.2\sqrt{5}-2.3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$	Paso 2
$=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}-6\sqrt{5}-5\sqrt{5}$	Se multiplican los coeficientes.
$=(3-4-6-5)\sqrt{5}$	Paso 3
$=(3-15)\sqrt{5}$	Se sumaron los negativos.
$=\mathbf{-12\sqrt{5}}$	Se restaron los coeficientes.

$\sqrt[3]{54x^2}+\sqrt[3]{250x^2}\;+3\sqrt[3]{128x^2}-4\sqrt[3]{686x^2}$

$=\sqrt[3]{2.3^3x^2}+\sqrt[3]{2.5^3x^2}+3\sqrt[3]{2.2^3.2^3x^2}-4\sqrt[3]{2.7^3x^2}$	Paso 1
$=3\sqrt[3]{2x^2}+5\sqrt[3]{2x^2}+3.2.2\sqrt[3]{2x^2}-4.7\sqrt[3]{2x^2}$	Paso 2
$=3\sqrt[3]{2x^2}+5\sqrt[3]{2x^2}+12\sqrt[3]{2x^2}-28\sqrt[3]{2x^2}$	Se multiplican los coeficientes.
$=(3+5+12-28)\sqrt[3]{2x^2}$	Paso 3
$=(20-28)\sqrt[3]{2x^2}$	Se sumaron los positivos.
$=\mathbf{-8\sqrt[3]{2x^2}}$	Se restaron los coeficientes.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{16}}+\sqrt[3]{\frac{375x}{343}}-\sqrt[3]{\frac{8}{250}}-\sqrt[3]{\frac{3x}{64}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3.2}}+\sqrt[3]{\frac{3.5^3x}{7^3}}-\sqrt[3]{\frac{2^3}{2.5^3}}-\sqrt[3]{\frac{3x}{2^3.2^3}}$$

Paso 1

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}\sqrt[3]{3x}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{3x}$$

Paso 2. Los factores del numerador salen al numerador y los del denominador salen al denominador.

$$=\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)\sqrt[3]{3x}$$

Se agruparon los factores semejantes

$$=\frac{11}{10}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\frac{13}{28}\sqrt[3]{3x}$$

Se busca el m.c.m. y se reducen los factores.

$$=\mathbf{\frac{13}{28}\sqrt[3]{3x}+\frac{11}{10}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$$

Se ordenan los términos.

PARA RECORDAR

Para eliminar una raíz cuadrada del denominador, se multiplica y divide la expresión dada por la raíz cuadrada que aparece en el denominador y se simplifica la expresión del denominador.

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}, \qquad luego\ \frac{1}{\sqrt{a}}\times\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

ASIGNACIÓN Nº 4.1

Realice las siguientes sumas y restas.

1. $6\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-8\sqrt{5}$
2. $\sqrt{13}-8\sqrt{13}+2\sqrt{13}-6\sqrt{13}$
3. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{5w}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5w}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{5w}-\frac{1}{20}\sqrt[3]{5w}$
4. $2x\sqrt{3}-5x\sqrt{2}+6x\sqrt{2}-2x\sqrt{2}-5x\sqrt{3}$
5. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}-\frac{4}{5}\sqrt[3]{3}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{2}+\frac{7}{10}\sqrt[3]{3}$
6. $\sqrt{363}-2\sqrt{147}+\sqrt{507}-3\sqrt{75}$
7. $\sqrt[3]{81t^3}-2\sqrt[3]{1029t^3}+\sqrt[3]{192t^3}-5\sqrt[3]{3t^3}$
8. $\sqrt[4]{512x^2}+\sqrt[4]{1250x^2}+\sqrt[4]{32x^2}-\sqrt[4]{162x^2}$
9. $\frac{1}{6}\sqrt{252x^2y}+\frac{2}{3}x\sqrt{112y}-\frac{1}{5}\sqrt{175x^2y}-x\sqrt{567y}$
10. $2\sqrt[3]{135y}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{192y}-6\sqrt[3]{375y}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{40y}$

4.2 MULTIPLICACION DE RADICALES

4.2.1 MULTIPLICACIÓN DE RADICALES SIMPLES.

PROCEDIMIENTO

1. Se multiplican los coeficientes entre sí.
2. Los radicandos se expresan como una multiplicación dentro de un radical común.
3. Se descomponen las cantidades subradicales.
4. Se agrupan de acuerdo al índice de la raíz.
5. Se simplifica.

OBSERVACIONES:

- Se multiplica numerador con numerador, denominador con denominador.
- Jamás multiplique una expresión que esté fuera del radical con otra que este dentro del radical.

Ejemplos: Multiplica:

$\sqrt{5}\times\sqrt{15}$

$=\sqrt{5\times 15}$	Paso 2
$=\sqrt{5\times 5.3}$	Paso 3
$=\sqrt{5^2.3}$	Paso 4
$=\mathbf{5\sqrt{3}}.$	Paso 5

$6\sqrt[3]{21}\ .\ 2\sqrt[3]{98}$

$=6.2\sqrt[3]{21.98}$	Paso 1 y 2
$=12\sqrt[3]{(3.7)(2.7.7)}$	Paso 3
$=12\sqrt[3]{2.3.7^3}$	Paso 4

$= 12.7\sqrt[3]{2.3}$	El factor 7 sale del radical.
$= \mathbf{84\sqrt[3]{6}}$	Paso 5

$$\frac{7}{10}\sqrt[3]{15x^2}\ por\ \frac{1}{x}\sqrt[3]{50x}$$

$= \left(\frac{7}{10}.\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{15x^2.50x}$	Paso 1 y 2
$= \frac{7}{10x}\sqrt[3]{3.5x^2.2.5^2x}$	Paso 3
$= \frac{7}{10x}\sqrt[3]{3.2.5^3.x^3}$	Paso 4
$= \frac{7.5x}{10x}\sqrt[3]{3.2}$	Salen del radical los factores 5 y x
$= \mathbf{\frac{7}{2}\sqrt[3]{6}}$	Paso 5

4.2.2 MULTIPLICACIÓN DE RADICALES COMPUESTOS

4.2.2.1 Monomio por polinomio.

> Para multiplicar radicales monomios por polinomios se debe aplicar como primer paso la propiedad distributiva, luego se siguen las reglas de multiplicación de radicales simples.

Ejemplos

Multiplica $\sqrt{15}\ (\sqrt{10} - \sqrt{40})$

$= \sqrt{15}\sqrt{10} - \sqrt{15}\sqrt{40}$	Propiedad distributiva.
$= \sqrt{(3.5)(2.5)} - \sqrt{(3.5)(2.2.2.5)}$	Descomposición en factores primos.
$= \sqrt{3.2.5^2} - \sqrt{2.3.2^2.5^2}$	Agrupar de acuerdo al índice del radical.
$= 5\sqrt{6} - 2.5\sqrt{6}$	Salen del radical los factores 2 y 5
$= 5\sqrt{6} - 10\sqrt{6}$	Se multiplica 2 por 5
$= \mathbf{-5\sqrt{6}}$	Se reducen los semejantes

Multiplica $\sqrt[3]{4x}\,(\sqrt[3]{10x^2} - \sqrt[3]{80x^2} - \sqrt[3]{270x^2} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{2x^2})$

$= \sqrt[3]{4x.10x^2} - \sqrt[3]{4x.80x^2} - \sqrt[3]{4x.270x^2} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{4x.2x^2}$	Propiedad distributiva.
$= \sqrt[3]{2^2x.2.5x^2} - \sqrt[3]{2^2x.2^4.5\,x^2} - \sqrt[3]{2^2x.2.3^3.5x^2} - \frac{1}{x}\sqrt[3]{2^2x.2x^2}$	Descomposición en factores primos
$= 2.x\sqrt[3]{5} - 2.2x\sqrt[3]{5} - 2.3.x\sqrt[3]{5} - \frac{1.2.x}{x}$	Salen del radical los factores 2,3,x
$= 2x\sqrt[3]{5} - 4x\sqrt[3]{5} - 6x\sqrt[3]{5} - 2$	Simplificando.
$= \mathbf{-8x\sqrt[3]{5} - 2}$	Reduciendo términos semejantes.

4.2.2.2 Polinomio por polinomio

PROCEDIMIENTO

1. Se escriben los factores entre paréntesis.
2. Se multiplica cada término del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis. Al efectuar la multiplicación dentro del radical descomponga los números en factores primos y exprese en forma exponencial los factores comunes o de acuerdo al índice.
3. Se sacan del signo radical, los factores que tienen el exponente igual o divisibles entre el índice de la raíz, utilizando el procedimiento de la multiplicación para radicales simples.
4. Se reducen los términos semejantes.

Ejemplos:

Multiplicar: $3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\ por\ 4\sqrt{7} - 5\sqrt{3}$

$=(3\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(4\sqrt{7} - 5\sqrt{3})$	Paso 1
$=12\sqrt{7^2} - 15\sqrt{7.3} + 8\sqrt{3.7} - 10\sqrt{3^2}$	Paso 2
$=12.7 - 15\sqrt{21} + 8\sqrt{21} - 10.3$	Paso 3
$=84 - 15\sqrt{21} + 8\sqrt{21} - 30$	Multiplicación de números.
$\mathbf{=54 - 7\sqrt{21}}$	Paso 4

Multiplicar $5\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\ \ por\ \ 3\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$

$= (5\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\ )(\ 3\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})$	Paso 1
$= 15\sqrt{(x+y)^2} - 5\sqrt{(x+y)(x-y)} + 3\sqrt{(x-y)(x+y)} - \sqrt{(x-y)^2}$	Paso 2
$= 15(x+y) - 5\sqrt{(x+y)(x-y)} + 3\sqrt{(x-y)(x+y)} - (x-y)$	Paso 3
$= 15x + 15y - 5\sqrt{(x+y)(x-y)} + 3\sqrt{(x+y)(x-y)} - x + y$	Multiplicando y Propiedad conmutativa.
$\mathbf{= 14x + 16y - 2\sqrt{(x+y)(x-y)}}$ **ó** $\mathbf{= 14x + 16y - 2\sqrt{x^2 - y^2}}$	Paso 4

ASIGNACIÓN Nº 4.2

I. Resuelva las siguientes multiplicaciones con radicales simples. (impares)

1. $\sqrt{14}\,.\sqrt{6}$
2. $\sqrt{21x}\,.\sqrt{10xy}\,.\sqrt{35y}$
3. $\sqrt[3]{12x^3}\,.\,\sqrt[3]{42x^2}\,.\sqrt[3]{105x}$
4. $(4\sqrt[5]{24a^2})(-3\,\sqrt[5]{18\,a})(\,2\,\sqrt[5]{6a^2})$
5. $\frac{1}{4}\sqrt[6]{96x^2y}\;\times\;-\frac{8}{3}\sqrt[6]{36x^4y^4}\;\times\;-\frac{6}{5}\sqrt[6]{54x^6y^3}$
6. $2\sqrt{\frac{a}{30}}\;.\;3\sqrt{\frac{a}{15}}\;.\,5\sqrt{\frac{a}{10}}$
7. $\frac{1}{2s}\sqrt[3]{224st}\,.\frac{1}{14}\sqrt[3]{162s^3t^4}\,.\frac{4}{3t}\sqrt[3]{294s^4t^2}$
8. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}\times\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$
9. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}\;\;por\;\frac{12}{7}\sqrt{y^5}$
10. $\frac{\sqrt{35b}}{\sqrt[3]{18b}}\times\frac{\sqrt{18ab}}{\sqrt[3]{20b}}\times\frac{\sqrt{42b}}{\sqrt[3]{75b}}$

II. Resuelva las multiplicaciones con radicales compuestos.(impares)

1. $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-3\right)$
2. $\sqrt{11}\;por\;\sqrt{22a}-\sqrt{33b}$
3. $2\sqrt{6}\;(2\sqrt{6}-\sqrt{3}\,)$
4. $\sqrt{15}\;por\;\sqrt{21}-\sqrt{10}$
5. $\sqrt{2x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{8x}\right)$
6. $5\sqrt{3}-4\sqrt{7}-6\sqrt{2}\;por\;7\sqrt{42}$
7. $2\sqrt{5}\;por\;3\sqrt{5}-2\sqrt{15}+8\sqrt{20}$
8. $\sqrt[3]{6x}\left(\sqrt[3]{9x^2}-\sqrt[3]{243x^2}\right)$
9. $\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)$
10. $\sqrt[4]{xyz}\left(\sqrt[4]{xyz}-2\sqrt[4]{xyz}+\sqrt[4]{xyz}\right)$
11. $\sqrt{6}-\sqrt{2}\;por\;\sqrt{6}+\sqrt{2}$
12. $2\sqrt{3}-\sqrt{5}\;por\;3\sqrt{3}+\sqrt{5}$
13. $\left(6\sqrt{2}-8\sqrt{11}\right)\left(9\sqrt{2}-5\sqrt{11}\right)$
14. $(3\sqrt{7}-2\sqrt{13}\,)(\sqrt{7}-4\sqrt{13}\,)$
15. $7\sqrt[3]{9}-4\;por\;2-3\sqrt[3]{9}$
16. $\sqrt{a}-\sqrt{b}\;por\;3\sqrt{a}-5\sqrt{b}$
17. $3\sqrt{x-y}\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}\right)$
18. $\sqrt{c-d}-5c\;por\;\sqrt{c-d}+4c$
19. $5\sqrt{2a-1}-\sqrt{2b-1}\;por\;3\sqrt{2a-1}+\sqrt{2b-1}$
20. $\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+x-6}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)$

4.3. DIVISIÓN DE RADICALES

4.3.1. DIVISIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES IGUALES

PROCEDIMIENTO

1. Se dividen los coeficientes entre sí
2. Se dividen las cantidades subradicales entre sí.
3. Se simplifica

   OBSERVACIONES.

   - Si el coeficiente y el radicando del divisor son fracciones, entonces se invierte el divisor en ambos casos y se multiplica.
   - Jamás simplifique un número o una expresión que este dentro del radical con una que este fuera del mismo.

Ejemplos:

Simplifique $80\,x^3y^2\sqrt{216}\div -16xy\sqrt{12}$

$= (80x^3y^2 \div -16xy)\sqrt{216 \div 12}$	Expresando ambas divisiones.
$= -5x^2y\sqrt{18}$	Paso 1 y 2, propiedad de potenciación.
$= -5x^2y\sqrt{2.3^2}$	Se descompone en factores primos.
$= -5x^2y.3\sqrt{2}$	Sale del radical el factor 3
$= \boldsymbol{-15x^2y\sqrt{2}}$	Paso 3

Divida $\sqrt[3]{324ab^5}\div 9\sqrt[3]{6b}$

$= (1 \div 9)\sqrt[3]{324ab^5 \div 6b}$	Expresando ambas divisiones.
$= \frac{1}{9}\sqrt[3]{54ab^4}$	Paso 1 y 2
$= \frac{1}{9}\sqrt[3]{2.3^3a.b^3.b}$	Se descompone en factores primos.
$= \frac{3b}{9}\sqrt[3]{2ab}$	Sale del radical los factores 3 y b.
$= \boldsymbol{\frac{b}{3}\sqrt[3]{2ab}}$	Paso 3

Divida $\frac{7}{2}\sqrt[4]{3m^7n^3}\div -\frac{21}{8}\sqrt[4]{\frac{16m^2}{135n}}$

$= \left(\frac{7}{2}\div -\frac{21}{8}\right)\sqrt[4]{3m^7n^3 \div \frac{16m^2}{135n}}$	Se expresan ambas divisiones
$= \left(\frac{7}{2}\times -\frac{8}{21}\right)\sqrt[4]{3m^7n^3 \times \frac{135n}{16m^2}}$	Se invierten el divisor y pasa a multiplicación, en ambos casos.
$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3m^7n^3.3^3.5n}{2^4m^2}}$	Se descompone en factores primos.
$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{3^4.5m^5n^4}{2^4}}$	Aplicando propiedad de potenciación.
$= -\frac{4}{3}.\frac{3mn}{2}\sqrt[4]{5m}$	Simplificando el radical.
$= \boldsymbol{-2mn\sqrt[4]{5m}}$	Simplificando.

4.3.2. DIVISIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES DIFERENTES

PROCEDIMIENTO

Para dividir radicales con índices diferentes, se debe reducir al mínimo común índice los radicales, luego se utiliza el procedimiento para dividir radicales con índices iguales.

Ejemplos

Divida $\sqrt[3]{81x^5y^4} \div \sqrt[6]{9x^3y}$

$= \sqrt[6]{(3^4x^5y^4)^2} \div \sqrt[6]{3^2x^3y}$	Se reduce al m.c.i
$= \sqrt[6]{3^8x^{10}y^8} \div \sqrt[6]{3^2x^3y}$	Se aplica la propiedad de potenciación.
$= \sqrt[6]{\frac{3^8x^{10}y^8}{3^2x^3y}}$	Se dividen los radicandos de igual índice.
$= \sqrt[6]{3^6x^7y^7}$	Aplicando propiedad de potenciación.
$= \sqrt[6]{3^6x^7.xy^7.y}$	Se agrupan de acuerdo al índice.
$= \boldsymbol{3xy\sqrt[6]{xy}}$	Se simplifican los radicales.

Divida $\frac{1}{2}\sqrt[4]{125x^6} \div -\frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt[12]{(5^3x^6)^3} \div -\frac{5}{2}\sqrt[12]{\left(\frac{x}{5}\right)^4}$	Se redujo al m.c.i
$= \frac{1}{2}\sqrt[12]{5^9x^{18}} \div -\frac{5}{2}\sqrt[12]{\frac{x^4}{5^4}}$	Aplicando propiedad de potenciación.
$= \left(\frac{1}{2} \times -\frac{2}{5}\right)\sqrt[12]{(5^9x^{18})\left(\frac{5^4}{x^4}\right)}$	Se invierten los divisores y se multiplica.
$= -\frac{1}{5}\sqrt[12]{5^{13}x^{16}}$	Se simplifica y aplica propiedad de potencia.
$= -\frac{5.x}{5}\sqrt[12]{5x^4}$	Salen del radical los factores 5 y x
$= \boldsymbol{-x\sqrt[12]{5x^4}}$	Se simplifica.

ASIGNACIÓN Nº 4.3

Resuelva las siguientes divisiones con radicales.

1. $\sqrt[3]{64x^5} \div \sqrt[3]{8x^2}$
2. $15\sqrt{343x^3} \div 3\sqrt{7x}$
3. $\sqrt{150a^3b^3} \div -\sqrt{3ab^2}$
4. $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1152a^5b^4} \div \frac{3}{10}\sqrt[4]{24a}$
5. $\sqrt[6]{128x^{15}y^7} \div 2x\sqrt[6]{2x^9y}$
6. $\frac{5}{3}\sqrt[5]{6561x^9y^{10}} \div \frac{10x}{9}\sqrt[5]{9x^4y^2}$
7. $\frac{\sqrt[6]{256a^7b^6}}{\sqrt[6]{32a^4b^3}}$
8. $\frac{5x\sqrt[7]{1024x^{10}y^{11}}}{2y\sqrt[7]{4x^2y^3}}$
9. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \div \frac{1}{7}\sqrt[3]{\frac{1}{625}}$
10. $\frac{3x^2}{7}\sqrt[4]{\frac{40x^2}{27a}} \div -\frac{2a}{7}\sqrt[4]{\frac{3x^6}{250a^6}}$

4.4 RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR.

En muchos cálculos matemáticos, es conveniente convertir aquellas fracciones con denominador irracional (con radical) a fracciones racionales (sin radical) que faciliten obtener de manera más rápida los valores en ciertas operaciones, ahorrando tiempo y evitando procesos tediosos, logrando como producto final los mismos resultados.

Racionalizar es el proceso que tiene por objeto eliminar los radicales del denominador en una fracción, buscando una expresión equivalente con el mismo valor y más sencilla que facilite el desarrollo de operaciones.

2.4.1 RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES MONOMIOS.

PROCEDIMIENTO

1. Se descompone en factores primos el radicando del radical en el denominador
2. Se multiplica la fracción por 1.
3. Se busca una expresión que cumpla $\sqrt[a]{x^{a-b}}$, siempre y cuando $\sqrt[a]{x^{b}}$ este en el denominador. Cuando **a** es igual o menor que **b** se simplifica primero el radical.
4. La expresión buscada se multiplica por el numerador y el denominador de la fracción, equivalente al valor de 1 para que no altere el resultado.
5. Se agrupan los términos de ambos radicales, en el denominador, tomando en cuenta el índice del a raíz.
6. Se simplifica.

Ejemplos

Racionaliza $\frac{3x}{2\sqrt[4]{8x}}$

$= \frac{3x}{2\sqrt[4]{2^3x}}$ Paso 1

$= \frac{3x}{2\sqrt[4]{2^3x}} * 1$ Paso 2

Paso 3 Como $\sqrt[4]{2^3x}$ está en el denominador entonces $\sqrt[4]{2^{4-3}x^{4-1}} = \sqrt[4]{2x^3}$

$= \frac{3x}{2\sqrt[4]{2^3x}} * \frac{\sqrt[4]{2x^3}}{\sqrt[4]{2x^3}}$ Paso 4

$= \frac{3x\sqrt[4]{2x^3}}{2\sqrt[4]{2^4x^4}}$ Paso 5

$= \frac{3x\sqrt[4]{2x^3}}{2.2.x}$ Se reduce

$= \frac{\mathbf{3\sqrt[4]{2x^3}}}{\mathbf{4}}$ Se simplifica.

Racionaliza $\sqrt[5]{\frac{3x^2}{125y^4}}$

$= \sqrt[5]{\frac{3x^2}{5^3y^4}}$ Paso 1

$= \sqrt[5]{\frac{3x^2}{5^3y^4} * 1}$ Paso 2

Paso 3 Como $\sqrt[5]{5^3y^4}$ está en el denominador
Entonces $\sqrt[5]{5^{5-3}y^{5-4}} = \sqrt[5]{5^2y}$

$= \sqrt[5]{\frac{3x^2}{5^3y^4} * \frac{5^2y}{5^2y}}$ Paso 4

$= \sqrt[5]{\frac{3.25x^2y}{5^5y^5}}$ Paso 5

$\boldsymbol{= \frac{1}{5y} \sqrt[5]{75x^2y}}$ Paso 6

4.4.2 RACIONALIZACIÓN DEDENOMINADORES POLINOMIOS.

Para racionalizar denominadores polinomios es importante conocer el concepto de conjugada de un binomio.

Definición

La conjugada de un binomio es otro binomio, con los mismos términos, que tiene el signo central contrario. Se dice que son conjugados porque el producto de ambos da como resultado una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

$3-\sqrt{2}, su\ conjugada\ es\ 3+\sqrt{2},$ $\quad (3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = (3)^2-(\sqrt{2})^2 = 9-2 = 7$

$3\sqrt{2}-7\sqrt{5}, su\ conjugada\ es\ 3\sqrt{2}+7\sqrt{5}$ $\quad (3\sqrt{2}-7\sqrt{5})(3\sqrt{2}+7\sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2-(7\sqrt{5})^2$

$= 9.2-49.5 = 18-245 = -227$

$\sqrt{5}+\sqrt{x+1}\ , su\ \ conjugada\ es\ \sqrt{5}-\sqrt{x+1}\ .$

PROCEDIMIENTO

1. Se multiplica la fracción por 1.
2. Se multiplica tanto el numerador como el denominador de la fracción, por la conjugada del denominador. Esta expresión es equivalente al valor de 1 para que no altere el resultado.
3. Se efectúan las multiplicaciones indicadas en el numerador; en el denominador, se aplica el producto notable de la suma por la diferencia.
4. Se reduce y se simplifica.

Ejemplos

Racionaliza el denominador $\frac{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} * 1$ Paso 1

$= \frac{\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ Paso 2

$= \frac{2-\sqrt{6}-5\sqrt{6}-3}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$ Paso 3

$= \frac{-1-6\sqrt{6}}{2-3}$ Paso 4

$= \frac{-1-6\sqrt{6}}{-1}$ Paso 4

$= \mathbf{1 + 6\sqrt{6}}$ Se dividió entre -1 el numerador

Racionaliza el denominador $\frac{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}$

$= \frac{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}} * 1$ Paso 1

$= \frac{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}} * \frac{\sqrt{a+b}-3\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-3\sqrt{a-b}}$ Paso 2

$= \frac{2(a+b)-6\sqrt{(a+b)(a-b)}-\sqrt{(a+b)(a-b)}+3(a-b)}{(\sqrt{a+b})^2-(3\sqrt{a-b})^2}$ Paso 3

$= \frac{2a+2b-7\sqrt{(a+b))(a-b)}+3a-3b}{(a+b)-9(a-b)}$ Paso 4

$= \frac{5a-b-7\sqrt{(a-b)(a+b)}}{a+b-9a+9b}$ Paso 4

$= \frac{\mathbf{5a-b-7\sqrt{a^2-b^2}}}{\mathbf{10b-8a}}$ Producto notable y se redujo el denominador

ASIGNACIÓN Nº 4.4

I. Encuentre la conjugada de los siguientes binomios.

1. $3-\sqrt{5}$
2. $\sqrt{3}+2\sqrt{7}$
3. $7\sqrt{11}-5\sqrt{13}$
4. $(a+b)+\sqrt{2}$
5. $\sqrt{8}+15$
6. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$
7. $\sqrt{a-b}+\sqrt{c-d}$
8. $\sqrt{x-y}-(x+5)$
9. $2\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$
10. $\sqrt{7}+4\sqrt{x-1}$

II. Racionalice los denominadores.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$
3. $\frac{2x}{\sqrt{2x}}$
4. $\frac{7}{\sqrt[3]{7x}}$
5. $\frac{5x}{\sqrt[4]{8x^2y^3}}$
6. $\frac{6xy}{\sqrt[5]{125x^2y}}$
7. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
8. $\frac{2\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}-5\sqrt{2}}$
9. $\frac{\sqrt{13}-3\sqrt{6}}{2\sqrt{13}+\sqrt{6}}$
10. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{7}}$

4.5 POTENCIA DE UN RADICAL.

Para elevar un radical a una potencia, el radicando de cada radical se eleva al exponente de dicha potencia, los radicales conservan el mismo índice.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplos

Elevar $\sqrt[5]{36x^2}$ $al\ cubo$

$= (\sqrt[5]{36x^2})^3$ Se eleva el radical al cubo.

$= \sqrt[5]{(2^2.3^2x^2)^3}$ Se aplica la regla de potencia.

$= \sqrt[5]{2^6 3^6 x^6}$ Se multiplican los exponentes en el radicando.

$= \sqrt[5]{2.2^5 3.3^5 x x^5}$ Se agrupan de acuerdo al índice.

$= 2.3x\sqrt[5]{2.3x}$ Salen del radical los factores 2,3, x

$= 6x\ \sqrt[5]{6x}$ Se simplifica.

Unidad

5

Resuelve ecuaciones de segundo grado con una incógnita por varios métodos en diferentes ejercicios propuestos.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

(DEL 17 DE SEPT. AL 25 DE SEPT.)

Las ecuaciones de segundo grado datan de muchos años. En la antigüedad, se conocieron algunos algoritmos que daban solución a estas ecuaciones. Se cree que los babilonios fueron los primeros pueblos en utilizar métodos para resolver ecuaciones de segundo grado, luego los egipcios para redefinir los límites de las parcelas en las crecidas del rio Nilo y después los griegos, pero estos últimos, utilizaban métodos geométricos. Parece ser que fue Diofanto de Alejandría quien le dio mayor impulso al tema, luego fue introducida en Europa por el matemático Abraham Bar Hiyya.

5.1 CONCEPTO

La palabra "***cuadrática***" deriva del vocablo latino "***quadratus***", que significa "***cuadrados***".

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una ecuación de la forma

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Donde ***a, b*** y ***c*** son números reales y **a** es distinto de cero

Ejemplos:

$6x^2 - 13x - 5 = 0$, a = 6, b = -13, c = -5

$x^2 - 5x + 6 = 0$, a = 1, b = -5, c = 6

5.2 CLASIFICACIÓN

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita se clasifican en dos grupos.

5.2.1 COMPLETAS

Son aquellas ecuaciones cuyos valores de ***a, b,*** y ***c*** son diferentes de cero. Son aquellas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejemplos:

$x^2 - 7x + 10 = 0$, Observa que a = 1, b = -7 y c = 10, son distintos de cero.

$5x^2 + 24x - 5 = 0$, Observa que a = 5, b = 24, c = -5, son distintos de cero.

5.2.2 INCOMPLETAS

Son aquellas ecuaciones cuyos coeficientes de ***b*** o ***c,*** pueden ser cero. Son aquellas de la forma $ax^2 + bx = 0$ y $ax^2 + c = 0$.

Ejemplos:

$x^2 - 3x = 0$, observa que a = 1, b = -3 y c = 0

$4x^2 - 16 = 0$, observa que a = 4, b = 0 y c =-16

Ejemplo 1:

Verifique si la ecuación dada es completa o incompleta.

$$\boldsymbol{\frac{x^2+2x}{4x^2} + \frac{2}{3} = \frac{5x+4}{12x}}$$

Primero hay que llevar al ecuación a la forma $x^2 + bx + c = 0$

$\frac{x^2+2x}{4x^2} - \frac{5x+4}{12x} + \frac{2}{3} = 0$,

Se pasa la expresión $\frac{5x+4}{12x}$ para el lado izquierdo con signo contrario.

$$\frac{3(x^2 + 2x) - x(5x + 4) + 4x^2(2)}{12x^2} = 0$$

Se busca el m.c.m. que es $12x^2$, se divide entre los denominadores.

$$\frac{3x^2 + 6x - 5x^2 - 4x + 8x^2}{12x^2} = 0$$

El resultado debe multiplicar los numeradores.

$$\frac{6x^2 + 2x}{12x^2} = 0$$

Se reducen los términos semejantes.

$6x^2 + 2x = 0(12x^2)$,

Se pasa el $12x^2$ para el otro lado del igual multiplicando.

$\boldsymbol{6x^2 + 2x = 0}$.

Es una **ecuación incompleta**, porque c = 0

Ejemplo 2. Verifique si la ecuación es completa o incompleta.

$\boldsymbol{3(2x - 7) + x(5x + 2) = 6x(x - 1) + 4x}$

$3(2x - 7) + x(5x + 2) - 6x(x - 1) - 4x = 0$

Se lleva la expresión a forma $ax^2 + bx + c = 0$

$6x - 21 + 5x^2 + 2x - 6x^2 + 6x - 4x = 0$

Se realizan las multiplicaciones correspondientes.

$\boldsymbol{-x^2 + 10x - 21 = 0}$

Se reducen los términos semejantes.

Es una ecuación completa, porque a, b y c son distintos de cero.

ASIGNACIÓN Nº 5.1

Clasifique las ecuaciones en completas e incompletas y escriba los valores de “a”, “b” y “c”.

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$ ____________________ _____ _____ _____
2. $x^2 = 36$ ____________________ _____ _____ _____
3. $5x^2 - 2x = 0$ ____________________ _____ _____ _____
4. $18x^2 - 2 = -9x$ ____________________ _____ _____ _____
5. $6x^2 - 8x = 10x$ ____________________ _____ _____ _____
6. $8x^2 - 7 = 3x^2 - 2$ ____________________ _____ _____ _____
7. $10x^2 - 5x = 2x + 6$ ____________________ _____ _____ _____

5.3 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

Resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita, consiste en determinar las raíces o números que hacen cero dicha ecuación. En este capítulo, estudiaremos tres métodos que te ayudaran a comprender mejor el tema.

1.3.1 MÉTODO Nº 1: FACTORIZACIÓN

La factorización no es un tema que te debe sorprender, la elección correcta de cada caso de factorización te ayudará en el éxito de este método.

Pasos para dar solución a una ecuación por este método:

1. Escribir la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, *b y c* pueden ser cero.
2. Se factoriza la ecuación, los casos más comunes son factor común monomio, trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $x^2 + bx + c = 0$, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ o diferencia de cuadrados.
3. Igualar a cero los factores resultantes.
4. Dar solución a la ecuación de segundo grado con una incógnita. Recuerda que son dos raíces o respuestas.

Ejemplos:
Encuentre las raíces o soluciones de la siguiente ecuaciones

$\boldsymbol{x^2 - 2x - 15 = 0}$

(x – 5)(x + 3) = 0	Paso 2. Es trinomio de forma $x^2 + bx + c = 0$ Se buscan dos números de forma que la suma o resta de – 2 y la multiplicación – 15.
x – 5 = 0 y x + 3 = 0	Paso 3
x = 5 y x = - 3	Paso 4

Las raíces son 5 y – 3

$\boldsymbol{3x^2 + 10x = 14 - 9x}$

$3x^2 + 10x - 14 + 9x = 0$	Paso 1. Se pasa 14 y – 9x para el otro lado con signo contrario.
$3x^2 + 19x - 14 = 0$	Paso 1. Se reducen los términos semejantes.

(3x – 2)(x + 7) = 0

3x – 2 = 0 y x +7 = 0

3x = 2 y **x = - 7**

$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}}$

Las raíces son:

$\boldsymbol{\frac{2}{3}\ y - 7}$

Paso 2. Es trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

3x	21x	7
1x	-2x	- 2
$3x^2$	19x	-14

- ✓ Se colocan los coeficientes abajo en la última fila.
- ✓ Se busca dos números que multiplicados de 3 (1 y 3) y dos que de 14 (2 y 7).
- ✓ Se multiplican los números que tienen la incógnita con los que no la tienen, en este caso, 3x con 7 y 1x con 2
- ✓ Los resultados se colocan en los cuadros del medio.
- ✓ Si la suma o resta de ellos da el término del medio o sea 19x, entonces se tiene los factores del trinomio. De lo contrario, busque otros números que satisfaga la ecuación o inviértalos.
- ✓ La solución es siempre los factores cruzados. O sea (3x – 2) y (x – 7)

$$\boldsymbol{2x(3x-5) - (x-3)^2 = (x-5)(x-2) + 7 - 2x}$$

$6x^2 - 10x - (x^2 - 6x + 9) = x^2 - 2x - 5x + 10 + 7 - 2x$

Se resuelven las multiplicaciones.

$6x^2 - 10x - x^2 + 6x - 9 - x^2 + 2x + 5x - 10 - 7 + 2x = 0$

Se pasan los términos para el otro lado del igual con signo contrario.

$4x^2 + 5x - 26 = 0$

Paso 1. Se reducen los términos semejantes.

1x	13x	13
4x	- 8x	- 2
$4x^2$	5x	-26

(x – 2) (4x +13) = 0

Paso 2. Es trinomio de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Se factoriza.

x – 2 = 0 y 4x + 13 = 0

$x = \mathbf{2}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x = -\frac{13}{4}}$**, son las raíces.**

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}+\mathbf{7})+\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}=\frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{5}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$$

$$\frac{1}{3\mathrm{x}}(\mathrm{x}+7)+\frac{\mathrm{x}-2x^2}{6\mathrm{x}^2}-\frac{\mathrm{x}-5}{2\mathrm{x}}+\frac{7}{12}=0$$

Se pasan los términos del lado derecho para el lado izquierdo con signo contrario.

$$\frac{4x(x-7)+2(x-2x^2)-6x(x-5)+x^2(7)}{12x^2}=0$$

Se busca el m.c.m., que es $12x^2$ y se divide este entre cada denominador.

$$\frac{4x^2-28x+2x-4x^2-6x^2+30x+7x^2}{12x^2}=0$$

Se multiplica los resultados de la división anterior por cada numerador.

$$\frac{x^2+4x}{12x^2}=0$$

Se reducen los términos semejantes

$$x^2+4x=0(12x^2)$$

Se pasa el denominador del lado izquierdo multiplicando al numerador del lado derecho.

$$x^2+4x=0$$

Elemento neutro.

$$x(x+4)=0$$

Factor común monomio.

$x=0 \qquad y \qquad x+4=0$

Paso 3

x = 0 y x = - 4 son las raíces.

5.3.2 MÉTODO Nº 2: COMPLETANDO CUADRADOS

El método de completar cuadrado consiste en buscar una alternativa de forma que un lado del igual, en la ecuación dada, se transforme en un trinomio cuadrado perfecto.

Pasos para dar solución a este método.

1. Escribir la ecuación a la forma $ax^2+bx+c=0$, *b y c* pueden ser cero.
2. Dividir cada uno de los términos de la ecuación entre el valor de “*a*”. Si el valor de “*a*” es 1, no es necesario este paso. La ecuación quedará de siguiente forma:
$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}.$$
3. Escribir la ecuación resultante a la forma $\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\qquad=-\frac{c}{a}$.
4. Buscar un término faltante para completar un trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo, este mismo término se debe sumar del lado derecho para no alterar la ecuación. El término faltante se buscar con la fórmula, $T_f=\left(\frac{b}{2}\right)^2$
5. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto y desarrollar el miembro o lado derecho.
6. Extraer la raíz cuadrada de ambos lados del a ecuación por balanceo, colocando en ambos lados el signo de radical.
7. Resolver las ecuaciones resultantes. El signo radical del lado derecho debe llevar doble signo. Uno positivo y otro negativo.

Ejemplos:

Resuelva la siguiente ecuación completando cuadrados.

$\boldsymbol{6x(x+3) = 3(x+5) + 14x}$

$6x^2 + 18x = 3x + 15 + 14x$	Se desarrollan las multiplicaciones.
$6x^2 + 18x - 3x - 15 - 14x = 0$	Se pasan los términos para el otro lado del igual con signos contrarios.
$6x^2 + x - 15 = 0$	Se reducen los términos semejantes.
$\frac{6x^2}{6} + \frac{x}{6} - \frac{15}{6} = 0$	Paso 2
$\frac{6x^2}{6} + \frac{x}{6} = \frac{15}{6}$	Paso 3
$\frac{6x^2}{6} + \frac{x}{6} = \frac{15}{6}$	Paso 4. $T_f = \left(\frac{1}{6.2}\right)^2$ $T_f = \left(\frac{1}{12}\right)^2$, $b = \frac{1}{6}$
$x^2 + \frac{x}{6} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{15}{6} + \left(\frac{1}{12}\right)^2$	Sumar en ambos lados de la ecuación.
$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{15}{6} + \frac{1}{144}$	Paso 5
$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{360 + 1}{144}$	Se busca el m.c.m. y se suman las fracciones, en el lado derecho.
$\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{361}{144}$	Suma de los numeradores.
$\sqrt{\left(x + \frac{1}{12}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{361}{144}}$	Paso 6
$x + \frac{1}{12} = \pm\frac{19}{12}$	Paso 7
$x = -\frac{1}{12} \pm \frac{19}{12}$	Se despeja la variable x
$x = \frac{-1 \pm 19}{12}$	Se busca el m.c.m.
$x_1 = \frac{-1+19}{12}$ y $x_2 = \frac{-1-19}{12}$	Se separan las raíces (positiva y negativa)
$x_1 = \frac{18}{12}$ y $x_2 = -\frac{20}{12}$	Se suman los enteros en los numeradores
$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}}$ **y** $\boldsymbol{x_2 = -\frac{5}{3}}$ **son las raíces.**	Se simplifica.

Ejemplo 2: $\boldsymbol{2x^2 - 7x = 3x^2 - 5x - 15}$

$0 = 3x^2 - 5x - 15 - 2x^2 + 7x$	Se pasa los términos para un lado del igual con signo contrario
$0 = x^2 + 2x - 15$	Paso 1
$x^2 + 2x - 15 = 0$	Se altera los miembros. No afecta el resultado
$x^2 + 2x = 15$	Paso 3

$x^2 + 2x \; + \; (1)^2 \quad = 15 + (1)^2$	Paso 4. $T_f \; = \; \left(\frac{2}{2}\right)^2 \; T_f = (1)^2, \; b = \; 2$ Se suman de ambos lados.
$(x+1)^2 = 16$	Paso 5
$\sqrt{(x+1)^2} = \; \pm\sqrt{16}$	Paso 6
$x + 1 = \; \pm 4$	Paso 7
$x = -1 \; \pm 4$	Se despeja la variable x.
$x_1 = \; -1 + 4$ y $x_2 = \; -1 - 4$	Se separan las raíces de doble signo.
$\boldsymbol{x_1 = \; 3}$ **y** $\boldsymbol{x_2 = \; -5}$ **son las raíces**.	

5.3.3 FÓRMULA GENERAL O CUADRÁTICA

Sea la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Se aplicará el método anterior para buscar una fórmula sencilla para extraer las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

$ax^2 + bx + c = 0$	Paso 1
$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$	Paso 2
$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$	Paso 3
$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$	Paso 4. $T_f \; = \; \left(\frac{b}{2a}\right)^2, \; b \; = \; \frac{b}{a}$
$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	Sumar en ambos lados de la ecuación.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$	Paso 5
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Se busca el m.c.m. y se suman las fracciones, en el lado derecho.
$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Paso 6
$x + \frac{b}{2a} = \; \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Paso 7
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	Se despeja la variable x

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

La ecuación anterior, es la fórmula general o cuadrática para dar solución a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

La expresión que aparece dentro el signo del radical ($b^2 - 4ac$) se conoce con el nombre de discriminante y se utiliza para determinar la naturaleza de las raíces.

Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son números reales y desiguales.

Si $b^2 - 4ac < 0$, Las raíces son números complejos y desiguales.

Si $b^2 - 4ac = 0$, Las raíces son números reales e iguales.

Ejemplos:

Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones, utilizando la fórmula general.

$\mathbf{3x^2 + 14x - 5 = 0}$

a = 3, b = 14, c = - 5

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-(14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)}$$

Se sustituyen los valores de a, b, y c.

$$\mathrm{x} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{6}$$

Se resolvieron los productos indicados.

$$\mathrm{x} = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{6}$$

Se restó dentro del radical

$$\mathrm{x} = \frac{-14 \pm 16}{6}$$

Se le extrajo la raíz a 256

$$x_1 = \frac{-14+16}{6} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-14-16}{6}$$

Se separaron las raíces.

$$x_1 = \frac{2}{6} \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{30}{6}$$

$$\mathbf{x_1 = \frac{1}{3} \quad y \quad x_2 = -5}$$

Son las raíces reales y diferentes.

$\mathbf{y^2 - 10y + 25 = 0}$ **a =1 b = -10, c = 25**

Solución:

$$\mathrm{y} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{y} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$$

Se sustituyen los valores de a, b, y c.

$$\mathrm{y} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2}$$

Se resolvieron los productos indicados.

$$\mathrm{y} = \frac{10}{2}$$

Se restó dentro del radical

$$\mathbf{y_1 = y_2 = 5}$$

Como $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$, Las raíces son números reales e iguales.

$$\frac{\mathbf{3x+7}}{\mathbf{7}}-\frac{\mathbf{2+3x}}{\mathbf{3}}=\frac{\mathbf{-3x^2-4}}{\mathbf{14}}+\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}}$$

Solución:

$$\frac{3x+7}{7}-\frac{2+3x}{3}-\frac{-3x^2-4}{14}-\frac{x}{6}=0$$

Se pasan los términos del lado derecho del igual para el lado izquierdo con signo contrario.

$$\frac{6(3x+7)-14(2+3x)-3(-3x^2-4)-7(x)}{42}=0$$

Se busca el m.c.m y se divide entre los denominadores.

$$\frac{18x+42-28-42x+9x^2+12-7x}{42}=0$$

Se multiplican los resultados con los numeradores.

$$\frac{9x^2-31x+26}{42}=0$$

Se reducen los términos semejantes.

$$9x^2-31x+26=0(42)$$

El denominador se pasa para el lado derecho multiplicando.

$$9x^2-31x+26=0$$

Luego ***a* = 9, *b* = - 31 *c* =26**

$$\mathrm{x}=\frac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\mathrm{b}^2-4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{x}=\frac{-(-31)\pm\sqrt{(-31)^2-4(9)(26)}}{2(9)}$$

Se sustituyen los valores de a, b, y c.

$$\mathrm{x}=\frac{31\pm\sqrt{961-936}}{18}$$

Se resolvieron los productos indicados.

$$\mathrm{x}=\frac{31\pm\sqrt{25}}{18}$$

Se restó dentro del radical

$$\mathrm{x}=\frac{31\pm 5}{18}$$

Se le extrajo la raíz a 25

$x_1=\frac{31+5}{18}$ y $x_2=\frac{31-5}{18}$

Se separaron las raíces.

$x_1=\frac{36}{18}$ y $x_2=\frac{26}{18}$

$\mathbf{x_1=2}$ **y** $\mathbf{x_2=\frac{13}{9}}$

Son las raíces reales y desiguales.

ASIGNACIÓN Nº 5.2

Resuelve los siguientes ejercicios propuestos por los métodos indicados.

1. $x^2 + x - 20 = 0$	Factorización
2. $x^2 - 9 = 0$	Factorización.
3. $3x^2 - 5x - 2 = 0$	Fórmula general.
4. $0 = 2x^2 + 11x - 21$	Fórmula general.
5. $x^2 - 25 = 0$	Fórmula general y Factorización.
6. $x^2 - 40 = 3x$	Completando cuadrados
7. $3y^2 - 18y = 0$	Factorización.
8. $5x^2 - 33x - 14 = 0$	Tres métodos.
9. $3x^2 - x = x + 21$	Factorización y Fórmula General.
10. $x^2 = 11x - 28$	Fórmula general y factorización

Unidad 6

Analiza algunos conceptos relacionados con la geometría y determina los ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA

(28 DE SEPT. AL 2 DE OCTUBRE – 1 SEMANA)

La geometría es una de las ramas de la matemática, considerada como una de las ciencias más antiguas. Las primeras investigaciones conocidas de la geometría se deben a los Egipcios y Babilonios (2000 años A.C.). Las inundaciones del río Nilo obligaron a los agrimensores egipcios a construir parcelas para salvar sus cosechas y rehacer los trazados de éstas cada año, problema que tuvieron que resolver midiendo sus tierras. Existen evidencias que afirman que los egipcios calculaban el área y volúmenes de sus pirámides a través de cálculos geométricos. Por su parte, la geometría de los babilonios, a pesar que era similar a la de los egipcios no tenía esa necesidad de agrimensura. Los babilonios, que vivieron en Mesopotamia, una fértil llanura entre los ríos Tigris y Éufrates (actual Irak); a través de la observación de los cuerpos celestes, luna y sol, calcularon el tiempo es decir, el periodo que una estrella recobrase su posición original. Ese periodo llamado año se componía de unos 360 días. Se piensa que a raíz de estos fenómenos de carácter astronómicos se dividió el círculo en 360 partes y a su vez, en otras 6 partes más (hexágono) que abunda en las construcciones de origen babilónico. Tal vez, esto fue lo que llevó a la creación del instrumento de geometría conocido como transportador. Instrumento que está basado en grados.

Algunos matemáticos que hicieron aportaciones valiosas a la geometría:

Tales de Mileto: Tratando de buscarle una explicación racional del universo, contribuyó enormemente en el avance de la geometría. Considerado el primero y más famoso de los siete sabios de Grecia. Se centró en los fundamentos de la geometría y creó el teorema que lleva su nombre sobre rectas paralelas cortadas por transversales.

Euclides: "Padre de la geometría", es el más famoso matemático de la antigüedad, su obra más importante llamada "elementos" y es una obra de geometría por excelencia de todos los tiempos y una de las más leídas de la historia. Su contenido está basado en 5 postulados de Euclides.

Arquímedes de Siracusa: Notable matemático, escribió importantes obras de geometría, hizo una buena aproximación al número Pi. Demostró que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la suscribe.

Apolonio de Perga: Llamado el gran geómetra. Realizó trabajos sobre secciones cónicas, curvas planas y cuadratura de sus áreas.

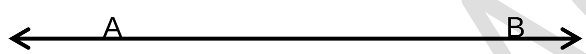
Pitágoras de Samos: Considerado el primer matemático Puro. Afirma que los números eran el principio de todas las cosas. Es famoso en la actualidad por el teorema que lleva su nombre, también se le atribuye la clasificación de los triángulos según sus ángulos, los números amigos y los números perfectos. Entre otras.

6.1 CONCEPTO DE GEOMETRÍA

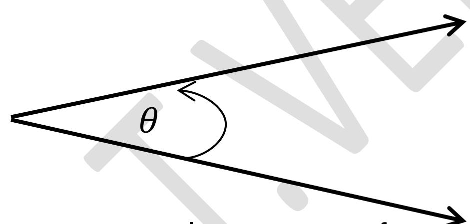
Es la rama de la matemática que estudia las figuras y cuerpos en el plano y en el espacio y cada una de sus propiedades. Se deriva de los vocablos griegos: "***geo***", que significa tierra y "***metría***", que significa medida. En términos generales geometría significa "***medida de la tierra***".

6.2 CONCEPTOS RELACIONADOS CON LA GEOMETRÍA.

Recta: Es la distancia más corta entre dos puntos.

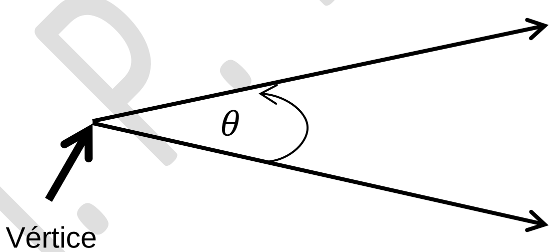


Ángulo: Es la región comprendida entre dos rectas que parten desde un mismo punto.



Se denota por ^ o $\angle$

Vértice: Punto que une las rectas que forman un ángulo.



Segmentos: Es una parte que se toma de una recta. Se denota por "__"

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

Razón entre dos segmentos: Es la división de la medida entre ambos segmentos.

A 4cm B   C 2 cm D

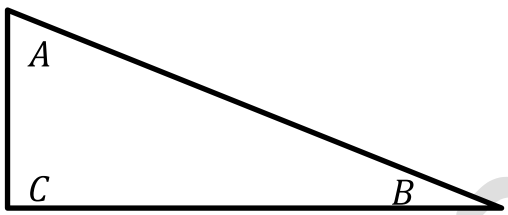
La razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{4}{2} = 2$

6.3 LOS TRIÁNGULOS Y SU CLASIFICACIÓN

Un triángulo es una figura geométrica que tiene tres lados, tres ángulos y tres vértices. Es la figura más resistente y por ello, la más usada en las edificaciones.

La característica principal de un triángulo es:

La suma de las medidas de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es siempre 180º.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

Los triángulos se clasifican por sus lados y por sus ángulos.

Por sus lados se clasifican en: Escaleno, Isósceles y equilátero.

a. **Triángulo Escaleno**: Es aquel tiene sus tres lados desiguales y en consecuencia tiene sus tres ángulos desiguales.
b. **Triángulo Isósceles**: Es aquel triángulo que tiene dos lados iguales y uno desigual. También tiene dos ángulos iguales y uno desigual.
c. **Triángulo Equilátero**: Es aquel que tiene sus tres lados iguales, la medida de sus ángulos internos es de 60º.

Por sus lados se clasifican en: Acutángulo, obtusángulo y rectángulo.

a. **Triángulo Acutángulo**: Es aquel triángulo que tiene sus tres ángulos agudos. Es decir, sus ángulos tienen medida menor a 90º.
b. **Triangulo Obtusángulo**: Triángulo que tiene un ángulo obtuso. Es decir, tiene un ángulo cuya medida es mayor de 90º.
c. **Triángulo Rectángulo**: Es aquel triangulo que tiene un ángulo recto o de medida igual a 90º.

En resumen, en cualquier triángulo dos de los ángulos son necesariamente, agudos.

El tercer ángulo puede ser agudo, obtuso o recto.

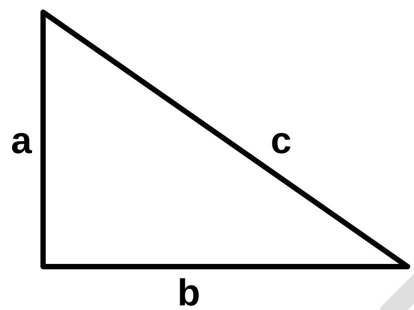
Los triángulos rectángulos cumplen una serie de relaciones métricas importantes entre sus lados.

Los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto(a y b) se las llaman ***catetos*** y el tercer lado (c) es la ***hipotenusa***. Este último lado es opuesto al lado recto.

6.4 TEOREMA DE PITÁGORAS.

El teorema de Pitágoras relaciona los dos catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo: ***En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.***

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$



$$c = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

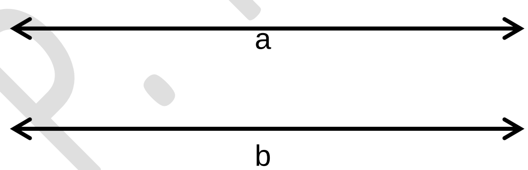
$$a = \pm\sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$$

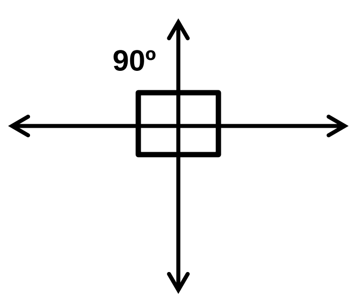
6.5 RECTAS PARALELAS, PERPENDICULARES.

Algunas rectas utilizadas en geometría son:

Rectas paralelas: Son aquellas rectas que por más que se prolonguen nunca se cortan. Se denota por el simbolismo **"//"** o sea, **a//b** y se lee **"*a paralelo a b*".**



Rectas perpendiculares: Son rectas que al cortarse forman un(os) ángulo(s) recto(s). o sea, de 90º. Se denota por el simbolismo "⊥" , a⊥b y se lee **"*a* perpendicular a *b*"**

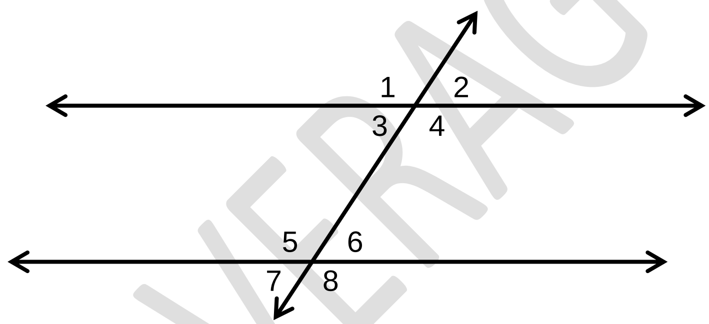


6.6 ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL.

Para saber la medida de los ángulos es importante conocer el concepto de congruencia y de recta transversal.

Congruencia de ángulos: Dos ángulos son congruentes si tiene la misma medida. Se denota por "≅" y se lee **"es congruente a".**

Recta transversal: Es aquella que forma ángulos mayores o menores a 90º cuando corta a otra u otras rectas.
Si una recta transversal corta a dos rectas paralelas se forman pares de ángulos que se clasifican en:
Ángulos Internos: son aquellos que están dentro de las rectas paralelas cortadas por la transversal. Ejemplos: $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$.
Ángulos Externos: Son aquellos que están fuera de las rectas paralelas cortadas por una transversal. Ejemplos: $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$, $\hat{8}$.



Estos ángulos se subdividen en pares de ángulos que son:
Ángulos Correspondientes: Son aquellos ángulos que cumple:

- ✓ Uno es externo y otro es interno.
- ✓ Ambos están del mismo lado de la transversal.
- ✓ Están en vértices diferentes
- ✓ Los ángulos tienen la misma medida.

Ejemplos: $\hat{1}\ y\ \hat{5}$, $\hat{2}\ y\ \hat{6}$, $\hat{3}\ y\ \hat{7}$, $\hat{4}\ y\ \hat{8}$.
Ángulos Alternos Internos: Son aquellos ángulos que cumple:

- ✓ Ambos son internos.
- ✓ Ambos están en lados opuestos a la transversal.
- ✓ Están en vértices diferentes
- ✓ Los ángulos tienen la misma medida.

Ejemplos: $\hat{3}\ y\ \hat{6}$, $\hat{4}\ y\ \hat{5}$.
Ángulos Alternos externos: Son aquellos ángulos que cumple:

- ✓ Ambos son externos.
- ✓ Ambos están en lados opuestos a la transversal.
- ✓ Están en vértices diferentes.
- ✓ Los ángulos tienen la misma medida.

Ejemplos: $\hat{1}\ y\ \hat{8}$, $\hat{2}\ y\ \hat{7}$,

Ángulos Conjugados internos: Son aquellos ángulos que cumple:

- ✓ Ambos son internos.
- ✓ Ambos están del mismo lado de la transversal.
- ✓ Están en vértices diferentes.
- ✓ La suma de los ángulos es 180º.

Ejemplos: $\hat{3}\ y\ \hat{5}$, $\hat{4}\ y\ \hat{6}$,

Ángulos Conjugados externos: Son aquellos ángulos que cumple:

- ✓ Ambos son externos.
- ✓ Ambos están del mismo lado de la transversal.
- ✓ Están en vértices diferentes.
- ✓ La suma de los ángulos es 180º.

Ejemplos: $\hat{1}\ y\ \hat{7}$, $\hat{2}\ y\ \hat{8}$,

Ángulos Opuestos por el vértice: Son aquellos que cumple:

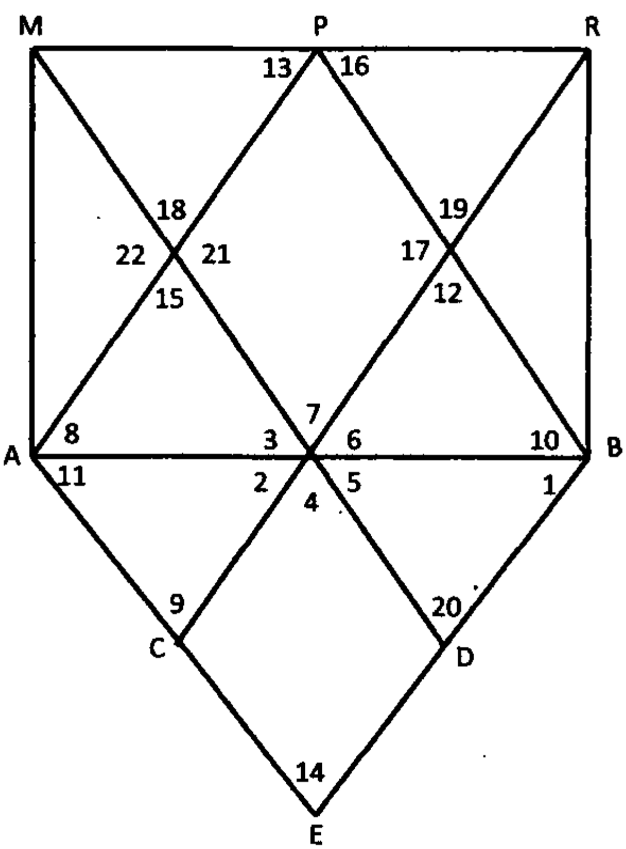
- ✓ Uno es interno y otro externo
- ✓ Ambos están en lado contrario de la transversal.
- ✓ Están en el mismo vértice.
- ✓ Los ángulos tienen la misma medida.

Ejemplos: $\hat{1}\ y\ \hat{4}$, $\hat{2}\ y\ \hat{3}$, $\hat{6}\ y\ \hat{7}$, $\hat{5}\ y\ \hat{8}$

Dos ángulos son **complementarios** si la suma de ellos es 90º.
Dos ángulos son **suplementarios** si la suma de ellos es 180º.
Ejemplos: $\hat{1}\ y\ \hat{2}$, $\hat{2}\ y\ \hat{4}$, $\hat{5}\ y\ \hat{7}$, $\hat{7}\ y\ \hat{8}$,

Observando la siguiente figura y tomando en cuenta las rectas paralelas cortadas por una transversal. Clasifique los pares de ángulos por su nombre.

SABIENDO QUE: $\overline{MR}\ //\ \overline{AB}$, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}\ //\overline{EB}$, $\overline{AE}\ //\ \overline{MD}\ //\overline{PB}$,



El $\hat{7}\ y\ el\ \widehat{15}$ son alternos internos, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{MD}$ es la transversal.

El $\hat{4}\ y\ el\ \widehat{18}$ son alternos externos, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{MD}$ es la transversal.

El $\widehat{18}\ y\ el\ \widehat{15}$ son opuestos por el vértice, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{MD}$ es la transversal.

El $\hat{1}\ y\ el\ \hat{2}$ son correspondientes, $\overline{EB}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{AB}$ es la transversal.

El $\widehat{12}\ y\ el\ \hat{7}$ son alternos internos, $\overline{PB}\ //\ \overline{MD}$ y $\overline{CR}$ es la transversal.

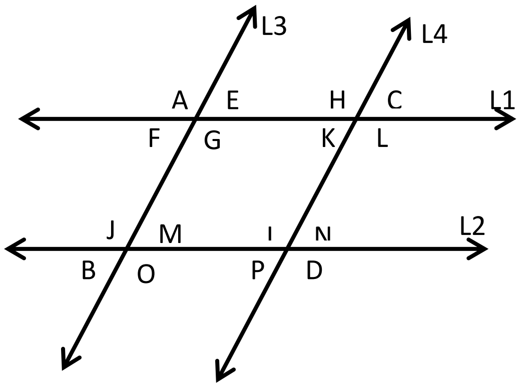
El $\hat{4}\ y\ el\ \widehat{22}$ son conjugados externos, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{MD}$ es la transversal.

El $\hat{7}\ y\ el\ \widehat{21}$ son conjugados internos, $\overline{AP}\ //\ \overline{CR}$ y $\overline{MD}$ es la transversal.

El $\widehat{17}\ y\ el\ \widehat{19}$ son suplementarios, son dos ángulos seguidos y la suma de ellos es 180°

ASIGNACIÓN Nº 6.1

I PARTE: Coloque en el espacio el nombre de los pares de ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. L1//L2 y L3//L4



$\hat{A}\ y\ \hat{G}$: ____________________________________

$\hat{F}\ y\ \hat{C}$: ____________________________________

$\hat{O}\ y\ \hat{I}$: ____________________________________

$K\ y\ \hat{G}$: ____________________________________

$\hat{F}\ y\ \hat{L}$: ____________________________________

$\hat{J}\ y\ \hat{G}$: ____________________________________

$\hat{K}\ y\ \hat{C}$: ____________________________________

$\hat{H}\ y\ \hat{I}$: ____________________________________

$H\ y\ \hat{G}$: ____________________________________

$\hat{B}\ y\ \hat{N}$: ____________________________________

$\hat{P}\ y\ \hat{H}$: ____________________________________

$\hat{F}\ y\ \hat{K}$: ____________________________________

$\hat{N}\ y\ \hat{D}$: ____________________________________

$\hat{C}\ y\ \hat{N}$: ____________________________________

$\hat{F}\ y\ \hat{M}$: ____________________________________

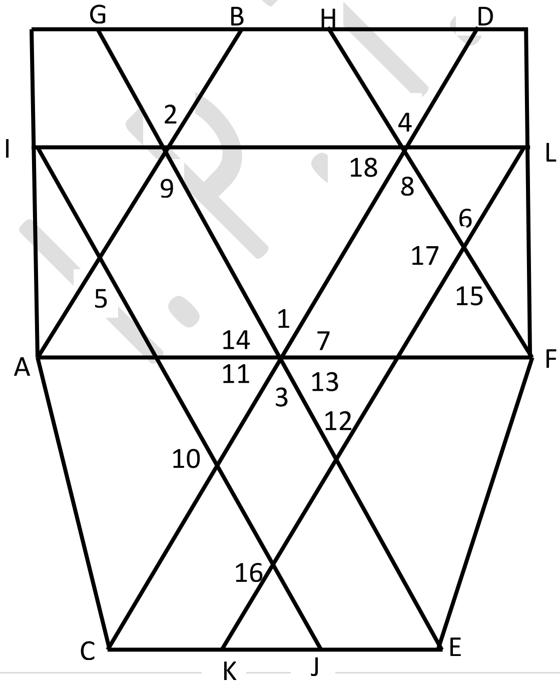
$\hat{A}\ y\ \hat{O}$: ____________________________________

$\hat{O}\ y\ \hat{M}$: ____________________________________

II PARTE: Tomando en cuenta las siguientes fig
respectivos nombres. Justifique su respuesta.

$\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{GE}//\overline{HF}$, $\overline{IJ}//\overline{GE}$, $\overline{CD}//\overline{KL}$, $\overline{GH}//\overline{IL}//\overline{AF}//\overline{CE}$,

Figura 2.1



$\widehat{10}\ y\ \widehat{16}$: ________________________________

$\hat{3}\ y\ \hat{2}$: ________________________________

$\hat{3}\ y\ \hat{8}$: ________________________________

$\hat{1}\ y\ \hat{9}$: ________________________________

$\hat{4}\ y\ \hat{8}$: ________________________________

$\hat{5}\ y\ \hat{2}$: ________________________________

$\hat{6}\ y\ \widehat{12}$: ________________________________

$\widehat{11}\ y\ \hat{7}$: ________________________________

$\hat{7}\ y\ \widehat{18}$: ________________________________

$\hat{5}\ y\ \widehat{10}$: ________________________________

$\widehat{12}\ y\ \widehat{17}$: ________________________________

$\hat{8}\ y\ \hat{7}+\widehat{13}$: ____________________________

$\hat{4}\ y\ \widehat{14}+\widehat{11}$: ____________________________

$\hat{3}, \widehat{11}, \widehat{13}$: ________________________________

$\hat{1}\ y\ \widehat{10}$: ____________________________________

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA

PARA TODA LA VIDA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°1

PROFESOR: ____

ESTUDIANTE: _____________________________________ 10°___________ FECHA: _________________

De solución a las siguientes operaciones. Plasme sus procedimientos en la hoja. Valor 20 puntos.

Aplique las propiedades. EXPRESE EN FORMA EXPONENCIAL LA RESPUESTA.

$\frac{5^7x^8x^5y^3y^7z^9}{5^4x^{12}y^4z^{11}z^2}$ 4 pts

$(5x^5y^3)^5(2x^4y)^3$ 4pts

$-5(4x^5)^0$ 2pts

Desarrolle las siguientes potencias.

$\left(-\frac{2p^7}{3z^4}\right)^5$ 5pts

$(-5a^{2x-1}b^{2y+5})^4$ 5pts

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA
PARA TODA LA VIDA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°2

PROFESOR: ___________________________________

ESTUDIANTE: ______________________________________ 10°________ FECHA: ________________

Resuelva. Se calificará los procedimientos. 20 puntos.

Exprese con exponentes positivos y simplifique.

$$\frac{xy^{-5}z^{-4}}{x^{-9}y^{-7}z^{6}}$$

4pts

$$\left(\frac{2^{-3}r^{-5}s^{-6}}{2^{-4}r^{-4}s^{5}}\right)^{2}$$

5pts

Exprese con exponentes fraccionarios. 3pts

$$9x\ \sqrt{y^{5}z^{7}}\ \sqrt[3]{a^{-2}}$$

Exprese con exponentes positivos y signo radical. 4pts

$$\frac{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{-\frac{1}{5}}}{y^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{3}{5}}}$$

Halle el valor de 4pts

$$81^{-\frac{1}{2}}.16^{\frac{1}{4}}$$

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N° 3

PROFESOR: ______________________________

ESTUDIANTE: ______________________________ 10°__________ FECHA: ____________Nº____

SIMPLIFIQUE LOS SIGUIENTES RADICALES

$\sqrt[4]{16x^{12}y^{20}}$ 4pts

$\frac{1}{6xy^3z}\sqrt[3]{432x^5y^9z^4}$ 5pts

AMPLIFIQUE O HACER ENTERO EL SIGUIENTE RADICAL 5 pts

$2x^2y^3z^4 \sqrt[4]{3xyz^2}$

HALLE EL M.C. I 6 pts

$\sqrt[3]{x^7y^2z^6}$, $\sqrt[6]{5a^5b^7c^4}$, $\sqrt[8]{7w^6x^4y}$, $\sqrt[4]{m^3n^6}$

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA
PARA TODA LA VIDA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°4

PROFESOR: ____

ESTUDIANTES: _________________________________ Nº____ 10°: _________ FECHA: ________

RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS. PLASME SUS PROCEDIMIENTOS EN LA HOJA

REALICE LAS SIGUIENTES SUMAS Y RESTAS

$-\sqrt{2a} - 11\sqrt{2a} - 9\sqrt{2a} + 4\sqrt{2a} + 2\sqrt{2a}$ 5 PTS

$\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} - \frac{4}{5}\sqrt[3]{3} - \frac{1}{8}\sqrt[3]{2} + \frac{7}{10}\sqrt[3]{3}$ 5 PTS

Sume:

$\sqrt[4]{512x^2} + \sqrt[4]{1250x^2} + \sqrt[4]{32x^2} - \sqrt[4]{162x^2}$ 10 PTS

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA

PARA TODA LA VIDA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

NSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°5

PROFESOR: ____

ESTUDIANTE: __________________________________ Nº____ 10°: __________ FECHA: _________

RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS. EL EJERCICIO ES EN GRUPO DE 2

MULTIPLIQUE. PLASME TODOS SUS PROCEDIMIENTOS EN LA HOJA.

$3\sqrt[3]{45}\,.\ \frac{1}{6}\sqrt[3]{15}\,.\ 4\sqrt[3]{20}$ 5pts

$3\sqrt{7}-2\sqrt{3}\ \ por\ 5\sqrt{3}+4\sqrt{7}$ 5 pts

DIVIDA.

$-15\sqrt[3]{40a^5}\ entre\ \ 5\sqrt[3]{5a^2}\,.$ 5 pts

$\frac{40}{14}\sqrt{75x^2y^2}\ \div\ \frac{5}{7}\sqrt{3xy}\,.$ 5 pts

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°6

PROFESOR: ____

ESTUDIANTES: _______________________________ 10°__________ Nº____ FECHA: __________

_______________________________ 10°__________ Nº____

De solución a las siguientes operaciones. Plasme sus procedimientos en la hoja. Valor 20 puntos. 5 p t s c . u .

Racionalice:

$$\frac{2x}{\sqrt[4]{9x}}$$

Racionalice

$$\frac{3\sqrt{2}+7\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$$

Resuelva la siguiente potencia

$$\left(3\sqrt[5]{81x^6}\right)^3$$

Halle la raíz

$$\sqrt{\sqrt[4]{1024x^{12}y^8z^2}}$$

CUANDO EXISTEN DOS RADICALES SE MULTIPLICAN LOS ÍNDICES Y LUEGO SE SIMPLIFICA EL RADICAL

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA
PARA TODA LA VIDA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°7

PROFESOR: ____

ESTUDIANTES: ______________________________ 10°__________ Nº____ FECHA: _________

HALLE LOS VALORES DE X

RESUELVA POR EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN 10 PUNTOS

$3x^2 - 5x - 2 = 0$

RESUELVA POR EL MÉTODO DE LA FÓRMULA GENERAL 10 PUNTOS

$4x^2 + 5x - 26 = 0$

REPÚBLICA DE PANAMÁ

MEDUCA

PARA TODA LA VIDA

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EJERCICIO DE MATEMÁTICA N°8

PROFESOR: ______________________________________

ESTUDIANTE: _________________________________ 10°________ FECHA: ________________Nº____

I PARTE: CIERTO O FALSO. 7 PTS

_____ La geometría es la rama de la matemática que estudia las figuras y cuerpos del plano y el espacio y sus propiedades.

_____ La parte que se toma de una recta se llama transversal.

_____ Dos rectas son paralelas si por más que se prolonguen nunca se cortan.

_____ Congruencia significa ángulos de diferentes medidas.

_____ Dos ángulos son suplementarios si la suma de ellos da como resultado 180°

_____ La suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre igual a 180°

_____ Geometría significa medida de la tierra.

II PARTE: LLENE LOS ESPACIOS CON LA RESPUESTA CORRECTA. 8 PTS

El punto que une las dos rectas que forman un ángulo se llama:________________________________

El triángulo que tiene sus tres lados desiguales se llama: ________________________________

La distancia más corta entre dos puntos es: ________________________________

La región comprendida entre dos rectas unidas por un punto se llama:

____

La división entre la medida de dos segmentos es: ________________________________

Triángulo que tiene sus tres lados iguales: ________________________________

Creador del teorema de Pitágoras. ________________________________

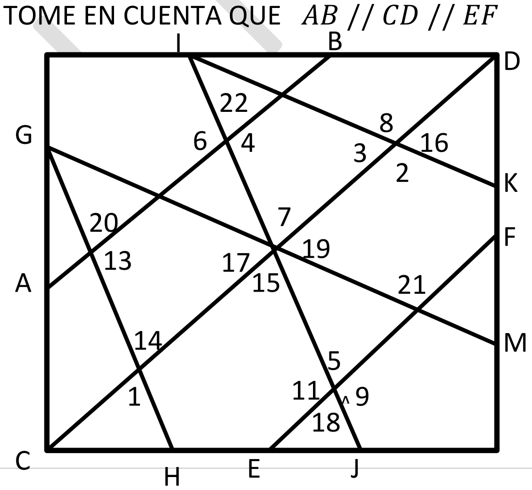
El libro de geometría más destacado de todos los tiempos es: ________________________________

III PARTE: PAREO. 5 PUNTOS

_____ Euclides	243 Hizo una buena aproximación al número pi.
_____ Arquímedes	334 Famoso por el teorema de triángulos rectángulos.
_____ Apolonio de Perga	342 Famoso por el teorema de rectas paralelas y transversales
_____ Pitágoras de Samos	234 Llamado el gran geómetra.
_____ Tales de Mileto	324 Padre de la geometría.

III PARTE: CLASIFIQUE LOS ÁNGULOS POR SUS NOMBRES. 5 PTS

TOME EN CUENTA QUE $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$ $\overline{GH} // \overline{IJ}$, $\overline{GM} // \overline{IK}$



6 y 20: ______________________________

14 y 15:______________________________

19 y 16: ______________________________

15 y 22: ______________________________

4 y 6: ______________________________