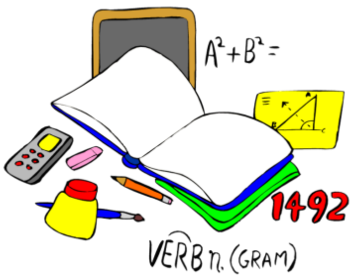
INSTITUTO PROFESIONAL Y TÉCNICO DE VERAGUAS

MÓDULO DE MATEMÁTICA



DÉCIMO GRADO

II TRIMESTRE

55 años

17 de mayo 1965

DOCENTES DE 10°

2020

Unidad 7

Aplica los principios de segmentos proporcionales en la solución de diversos problemas.

PROPORCIONALIDAD ENTRE SEGMENTOS

Se cree que el origen de los segmentos proporcionales (según Plutarco) estuvo relacionado con un viaje que Tales de Mileto realizó a Egipto. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber la altura de las pirámides. Tales, valiéndose de la proyección de los rayos solares, realizó algunas mediciones y utilizó la sombra de las pirámides en una hora específica del día, empleando una técnica, pudo medir la altura de las pirámides de Keops, en Egipto.

En la vida real, en concepto de proporcionalidad, se utiliza en muchas situaciones, como por ejemplo:

- Un niño ha crecido mucho y está bien proporcionado.
- El éxito de una persona está proporcionado a su trabajo.
- Para repartir un pastel entro un niño delgado y un adulto obeso, la porción para ambos debe ser a proporción de su contextura.
- La fuerza de un ratón es menor en proporción a la de un elefante.
- El salario de los trabajadores debe ser proporcional a su desempeño.

En matemática, el significado es más restringido, pero en ambos casos resulta ser la relación entre magnitudes medibles.

En este capítulo, nos dedicaremos al estudio de los segmentos proporcionales para luego aplicarlo en la semejanza de triángulos.

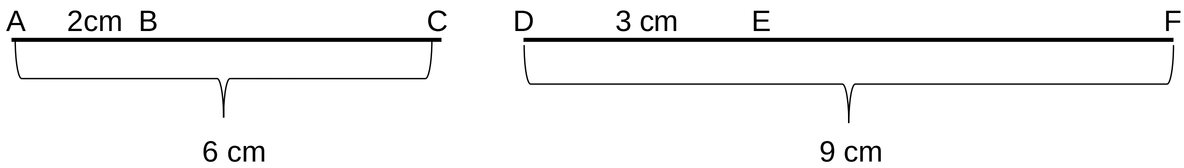
3.1 CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD.

Una proporción es la igualdad entre dos razones, o sea la relación entre dos magnitudes medibles. Por lo tanto, dos segmentos son proporcionales a otros dos cuando la razón de los dos primeros es igual a la razón de los otros dos.

Dado la medida de 4 segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ y tomados dos a dos, se dice que son proporcionales si las razones son iguales: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}}$, donde $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ se les llama medios y $\overline{AB}$, $\overline{GH}$ se denominan extremos.

Ejemplo:

Dado dos segmentos.



Luego, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$

La razón (división) de los dos primeros debe ser igual a la razón (división) de los otros dos.

Es decir, $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

Si el producto de $(\overline{AB})(\overline{DF}) = (\overline{DE})(\overline{AC})$, entonces los segmentos son proporcionales.

Finalmente, (2)(9) = (3)(6) = 18

Se concluye que:

En una proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Ejemplo:

$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$, 6 y 10 son los medios y 5 y 12 son los extremos. Por lo tanto,

(5)(12) = (6)(10)

60 = 60

3.2 CUARTA, TERCERA Y MEDIA PROPORCIONAL.

En la proporción de segmentos, existen relaciones para calcular las magnitudes de segmentos desconocidos.

Cuarta proporcional: Se llama cuarta proporcional de tres cantidades conocidas(a, b, c) al valor desconocido “x” que cumple la siguiente condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \text{ entonces } x = \frac{(b)(c)}{a}$$

Ejemplo:

si a = 15, b = 12 y c = 11, Halle x

$$\frac{15}{12} = \frac{11}{x}$$

$$x = \frac{(12)(11)}{15} = 8{,}8$$

Tercera proporcional: Se llama tercera proporcional de dos cantidades conocidas(a, b) al valor desconocido "x" que cumpla la siguiente condición.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}, \text{ entonces } \ x = \frac{b^2}{a},$$

Ejemplo:

Si a = 12, b = 8 y Halle x

$$\frac{12}{8} = \frac{8}{x}$$

$$x = \frac{(8)(8)}{12} = 5{,}33$$

El valor desconocido es igual al cuadrado del término de igual valor dividido entre el término con desigual valor.

Media proporcional: Se llama media proporcional de dos cantidades conocidas(a, b) al valor desconocido "x" que cumpla la siguiente condición:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}, \text{ entonces } \ x^2 = (a)(b), \ x = \sqrt{(a)(b)}$$

Ejemplo:

si a = 25, b = 9 y Halle x

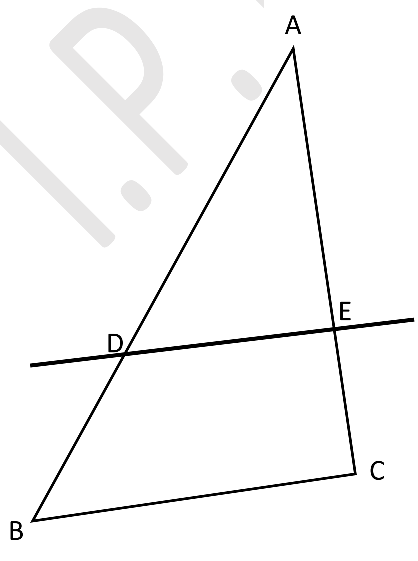
$$\frac{25}{x} = \frac{x}{9}$$

$$x = \sqrt{(25)(9)} = 15$$

3.3 PRINCIPIOS DE PROPORCIONALIDAD

3.3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL.

Si una recta es paralela (//) a uno de los lados del triángulo, entonces divide a los otros lados del triángulo en segmentos proporcionales y se cumple que los segmentos totales son proporcionales a los segmentos parciales.



SI $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$, ENTONCES SE CUMPLE QUE:

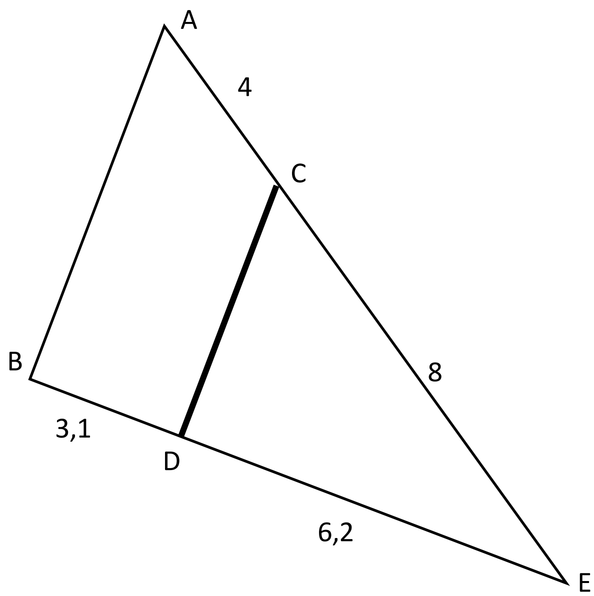
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

Ejemplos

1. Compruebe si se cumple o no el teorema fundamental de proporcionalidad



SOLUCIÓN:

Para que se cumpla el Teorema Fundamental de Proporcionalidad (T.F.P) $\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$

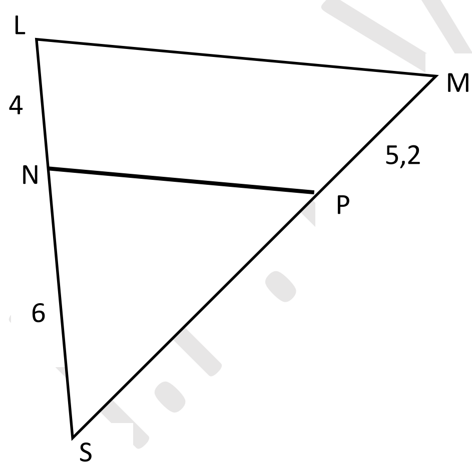
Reemplazando los valores

$$\frac{3,1}{6,2} = \frac{4}{8}$$

Multiplicando en cruz o dividiendo, se tiene
(3,1)(8) = (6,2)(4), LA RAZÓN ES 0,5

24,8 = 24,8. Luego se cumple el T.F.P. De este modo, $\overline{AB} // \overline{DC}$

2. Si $\overline{LM} // \overline{NP}$, En el ΔLMS. **Halle $\overline{SM}$**



SOLUCIÓN:

Como $\overline{LM} // \overline{NP}$ se cumple el Teorema Fundamental de Proporcionalidad (T.F.P)
$\frac{\overline{LN}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{PS}}$

Reemplazando los valores

$$\frac{4}{5,2} = \frac{6}{\overline{PS}}$$

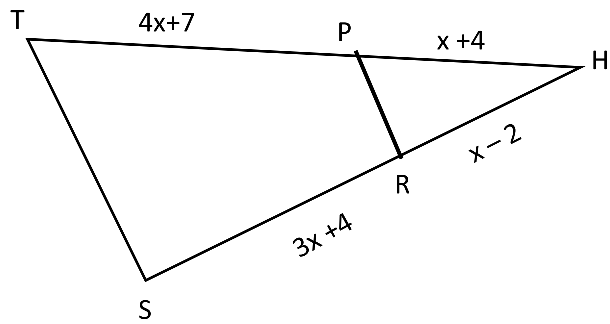
Aplicando la cuarta proporcional, multiplicando en cruz y dividiendo, se tiene:

$\overline{PS} = \frac{(5,2)(6)}{4} = \frac{31,2}{4} = 7,8$

Luego, $\overline{SM} = \overline{SP} + \overline{PM}$

$\overline{SM} = 7,8 + 5,2 = 13,$ $\boldsymbol{\overline{SM} = 13}$

3. Si $\overline{TS}\ //\overline{PR}$. Halle el valor de “x” y “y” los segmentos $\overline{SR}\quad y\ \overline{PH}$



SOLUCIÓN

Como $\overline{TS}\ //\overline{PR},$ se cumple el Teorema Fundamental de Proporcionalidad (T.F.P)

$$\frac{\overline{TP}}{\overline{PH}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{RH}}$$

Reemplazando los valores: $\frac{4x+7}{x+4}=\frac{3x+4}{x-2}$

Multiplicando en cruz, se tiene: (4x +7)(x +2) = (x+4)(3x + 4)

$4x^2+8x+7x+14=3x^2+4x+12x+16$

Pasando todos los términos para el lado izquierdo de la ecuación

$4x^2+8x+7x+14-3x^2-4x-12x-16=0$

Reduciendo los términos semejantes

$x^2-x-2=0,$ es un Trinomio de la forma x^2+bx+c

Solución x =2 y x = -1 descartada porque es un valor negativo.

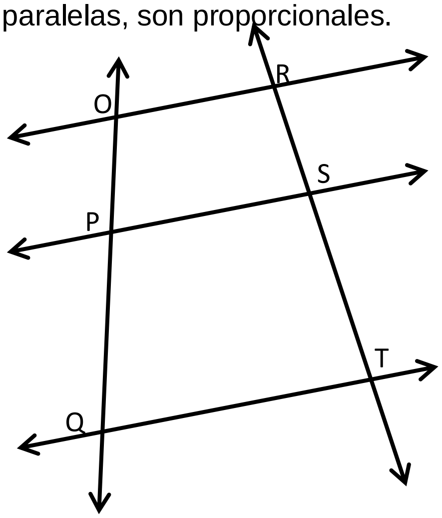
x = 2.

$\overline{SR}=3x+4=3(2)+4=10$ $\qquad$ $\overline{PH}=x+4=2+4$

$\overline{SR}=10$ $\qquad$ $\overline{PH}=6$

3.3.2. TEOREMA DE THALES

Si tres rectas paralelas son intersecadas por dos rectas transversales, los segmentos que se forman con las rectas transversales, determinados por las paralelas, son proporcionales.



SI $\overline{OR} // \overline{PS} // \overline{QT}$, ENTONCES SE CUMPLE QUE:

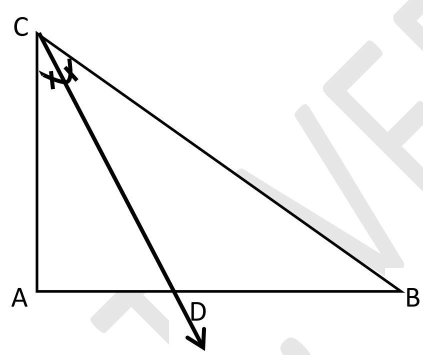
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{ST}}$$

3.3.3. TEOREMA DE LA BISECTRIZ.

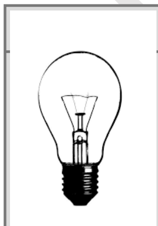
La bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los contiguos.



SI $\overline{CD}$ ES LA BISECTRIZ DEL $\widehat{C}$, ENTONCES SE CUMPLE QUE:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$$

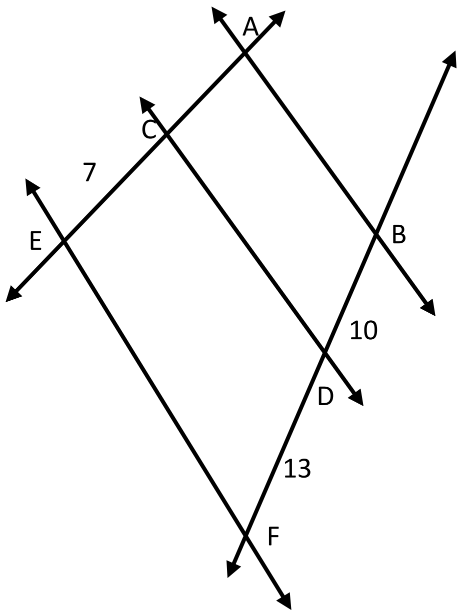


PARA RECORDAR

La ***bisectriz*** es un segmento que divide el ángulo de un triángulo en dos partes iguales.
La ***mediana*** es un segmento de recta trazado desde el vértice de un triángulo hasta el punto medio de su lado opuesto.
La ***altura*** es un segmento de recta perpendicular a un lado, o su prolongación que pasa por el vértice del lado opuesto de un triángulo.
La ***mediatriz*** es la recta perpendicular del lado de un triángulo que parte desde su punto medio.

Ejemplos

1. Encuentre el valor de $\overline{AC}$. Tome en cuenta que $\overline{AB}//\overline{CD}//\overline{EF}$



SOLUCIÓN:

Como $\overline{AB}//\overline{CD}//\overline{EF},$

se cumple el Teorema de Tales (T.D.T)

$\frac{\overline{EC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DB}}$

Reemplazando los valores

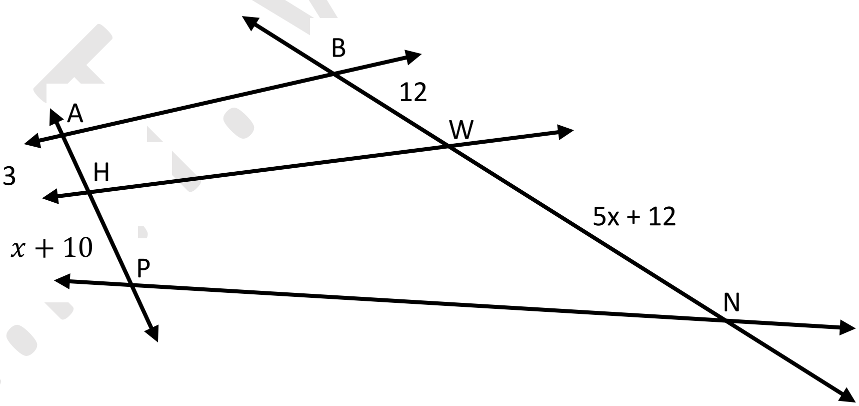
$$\frac{7}{13} = \frac{\overline{CA}}{\overline{10}}$$

Aplicando la cuarta proporcional, multiplicando en cruz y dividiendo, se tiene:

$\overline{CA} = \frac{(7)(10)}{13} = \frac{70}{13} = 5{,}38$

Luego, $\boldsymbol{\overline{CA} = 5{,}38}$

2. Encuentre los valores de x, $\overline{HP}$, $\overline{WN}$, $\overline{AP}\ y\ \overline{BN}$. Tome en cuenta que $\overline{AB}//\overline{HW}//\overline{PN}$



SOLUCIÓN

$\frac{\overline{AH}}{\overline{HP}} = \frac{\overline{BW}}{\overline{WN}}$ Aplicando el teorema de Tales

$\frac{3}{x+10} = \frac{12}{5x+12}$, Reemplazando

(3)(5x+12) = (12)($x + 10$), multiplicando en cruz

$15x + 36 = 12x + 120$ De aquí, $15x - 12x = -36 + 120$, luego : $3x = 84$

$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{84}{3}$ ***x = 28***

Para buscar los otros resultados se reemplaza el valor de "x" por 28

$\overline{HP} = x + 10 = 28 + 10 \ = 38$ $\qquad$ $\mathbf{\overline{HP} = 38}$

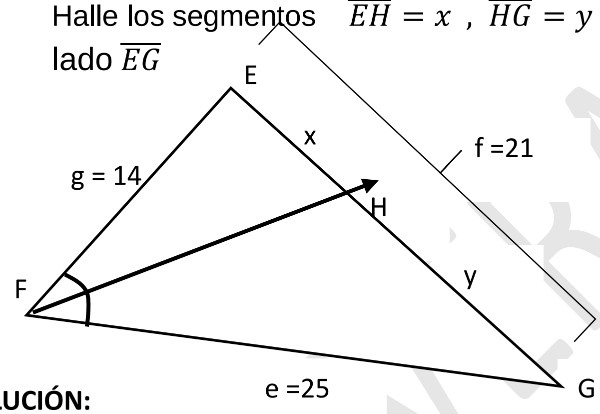
$\overline{WN} = 5x + 12 = 5(28) + 12 = 140 + 12 = 152$ $\qquad$ $\mathbf{\overline{WN} = 152}$

$\overline{AP} = \overline{AH} + \overline{HP} = 3 + 38 = 41$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{AP} = 41}$

$\overline{BN} = \overline{BW} + \overline{WN} = 12 + 152 = 164$ $\qquad$ $\boldsymbol{\overline{BN} = 164}$

3. En el ΔEFG, e = 25cm, g = 14cm y f = 21cm.

Halle los segmentos $\overline{EH} = x$, $\overline{HG} = y$ determinados por la bisectriz del lado $\overline{EG}$



SOLUCIÓN:

$\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{HG}}$ Aplicando en teorema de la bisectriz

$\frac{14}{25} = \frac{x}{y}$ Reemplazando. Como x+y = 21, entonces: ***y = 21- x***

$\frac{14}{25} = \frac{x}{21-x}$ Reemplazamos y por 21 – x y aplicamos la cuarta proporcional

14(21 – x) = 25x

$294 - 14x = 25x$ eso equivale a, $294 = 14x + 25x$ $\qquad$ $294 = 39x$

$\frac{294}{39} = \frac{\cancel{39}x}{\cancel{39}}$ Luego, ***x = 7,54***

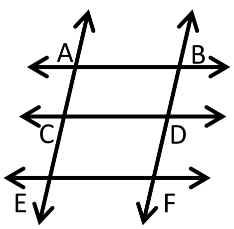
Para buscar el valor de ***y***, reemplazo el valor de ***x*** en y = 21 – x

y = 21 – (7,54) ***y = 13,46***

ASIGNACIÓN Nº 7.1

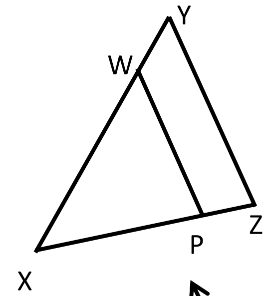
I PARTE: Complete las siguientes proporciones. **LOS IMPARES**

1.



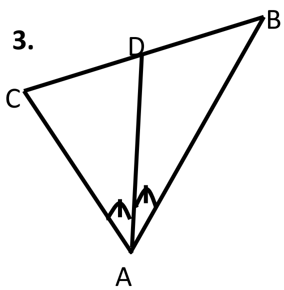
$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ =--------

2.



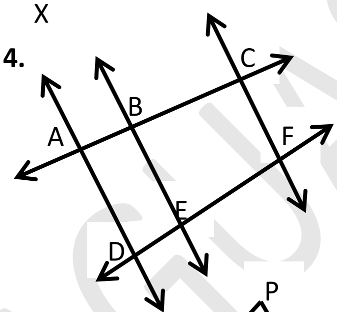
$\frac{\overline{XY}}{\overline{WY}}$ =--------

3.



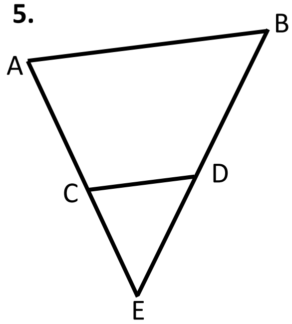
$\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ =--------

4.



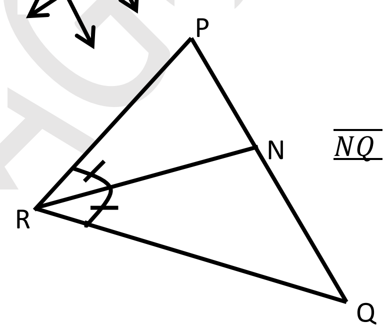
$\underline{\overline{AB}}$ = $\underline{\overline{DE}}$

5.



$\underline{\overline{AC}}$ = $\underline{\overline{BD}}$

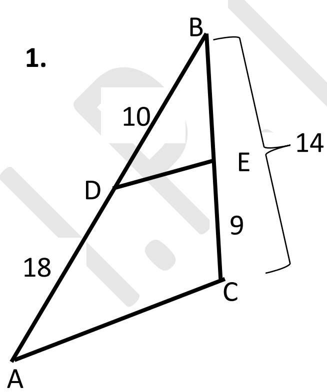
6.



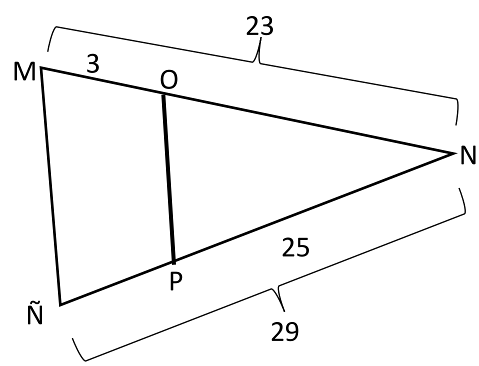
$\underline{\overline{NQ}}$ = $\underline{\overline{QR}}$

II PARTE: Compruebe Si se cumple o No el Teorema Fundamental de Proporcionalidad.

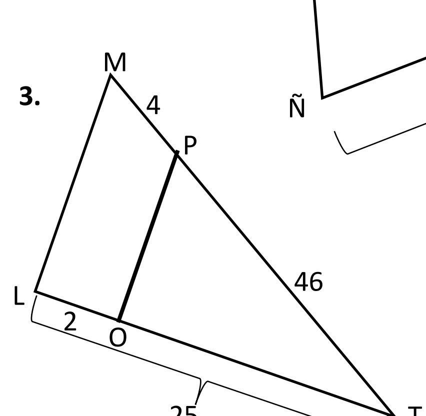
1.



2.



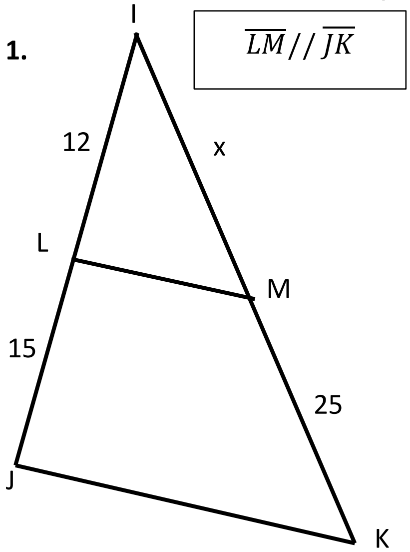
3.



II PARTE: Encuentre los valores indicados, usando el Teorema de Tales, el Teorema Fundamental de Proporcionalidad y el Teorema de la Bisectriz.

1.

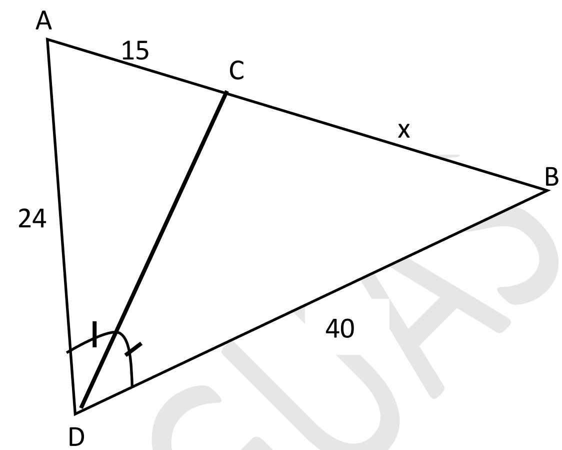
$\overline{LM} // \overline{JK}$



Halle los valores de x, $\overline{IK}$

2.

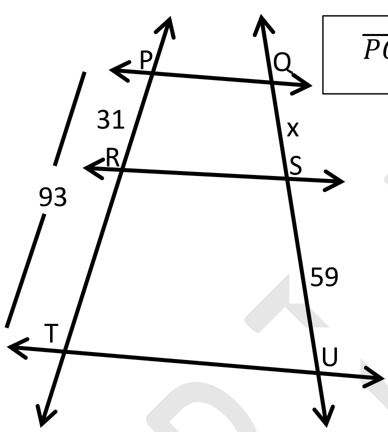
$\overline{DC}$ *es la bisectriz del ángulo D*



Halle los valores de $\overline{CB}$ *y* $\overline{AB}$

3.

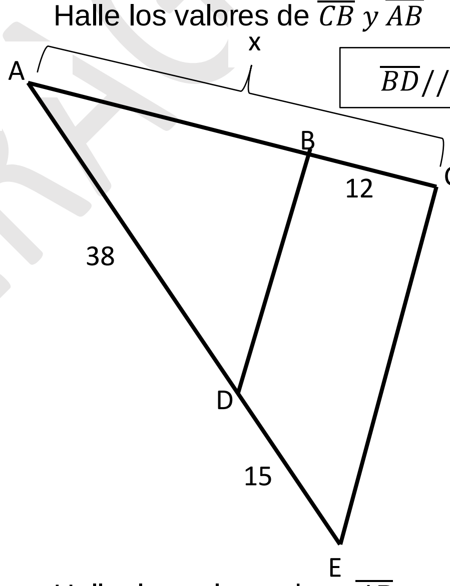
$\overline{PQ} // \overline{RS} // \overline{TU}$



Halle los valores de x, $\overline{QU}$

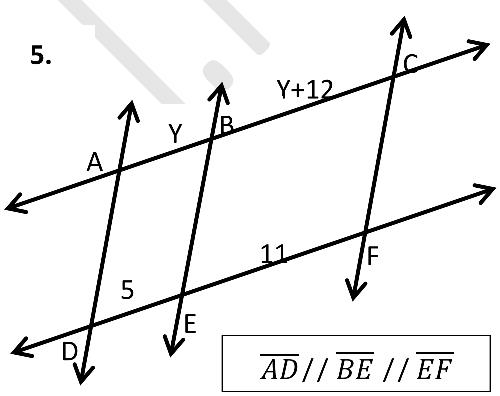
4.

$\overline{BD} // \overline{CE}$



Halle los valores de x, $\overline{AB}$

5.

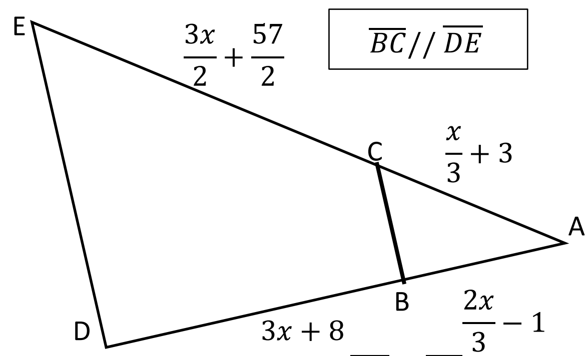


$\overline{AD} // \overline{BE} // \overline{EF}$

Halle los valores de y, $\overline{AC}$

6.

$\overline{BC} // \overline{DE}$



Halle los valores de x, $\overline{AD}$ *y* $\overline{AC}$

Unidad 8

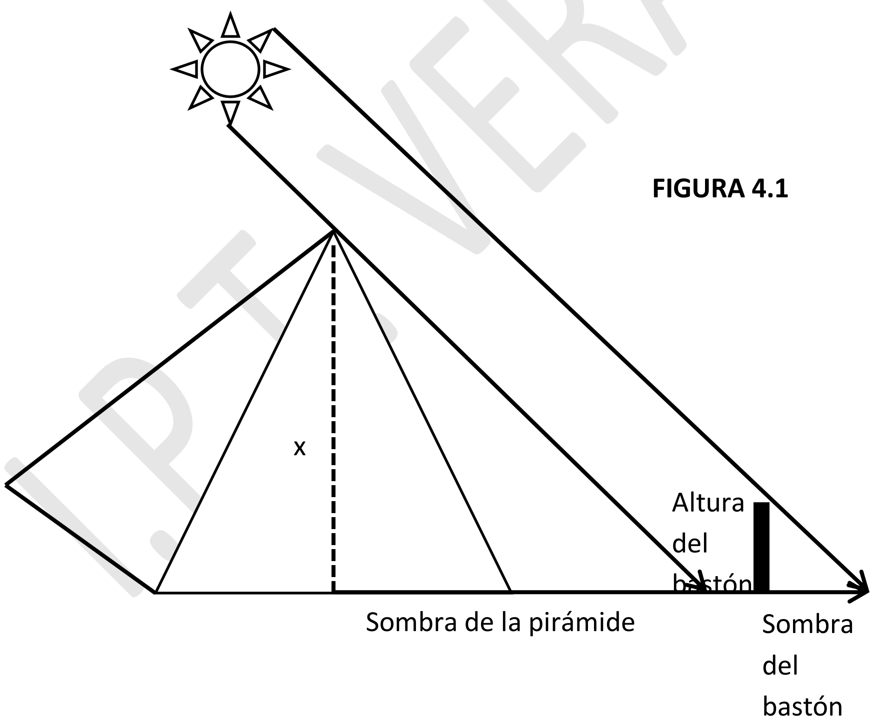
Aplica los criterios de semejanza en diversas figuras geométricas y situaciones del entorno.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

No se sabe con certeza cuando fue la primera vez que se utilizó el concepto de semejanza. Sin embargo, las necesidades de agrimensura y de construcción pudo haber sido lo que llevó a los pueblos antiguos a utilizar de manera informal este concepto. Existen muchas opiniones sobre la utilización de la semejanza por los babilonios, griegos y egipcios, en tablillas encontradas de estos pueblos, se observaron dibujos de triángulos con medidas que, aparentemente se aplicó una fórmula de semejanza equivalente a la que actualmente utilizamos.

Diversas fuentes antiguas como la de Diógenes Laercio, Plinio y Plutarco, contaron que Tales de Mileto, reconocido pensador griego, calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. A demás, midió la altura de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo (bastón) vertical era exactamente igual a la longitud del mismo, a través de los rayos del sol. Ver FIGURA 4.1

FIGURA 4.1



$$\frac{altura\ de\ la\ pirámide}{sombra\ de\ la\ piramide} = \frac{altura\ del\ bastón}{sombra\ del\ bastón}$$

Este término evolucionó en la escuela pitagórica al igual que el de las proporciones, aunque reconocen que sus orígenes pueden rastrearse en los babilonios. Las primeras demostraciones en lo relativo a figuras semejantes se encuentran en “***los elementos***” de Euclides. Conforme fue pasando el tiempo, surgió la necesidad de estudiar este concepto más a fondo ya que aparecía en muchas situaciones del entorno, fueron muchos matemáticos que le dieron auge y un desarrollo formal a la semejanza.

El concepto de semejanza con el de proporcionalidad guardan mucha relación, el análisis del mismo ayudará a comprender su significado y aplicarlo en muchas soluciones de problemas.

Cuando se habla de objetos parecidos a otros, objetos de igual forma o tamaño, es posible que se estén refiriendo a semejanza de objetos. También, cuando se establece una relación entre dos cosas como por ejemplos:

El reloj de Juan es semejante al de Pedro.

El rostro de María guarda una semejanza con el de su hermano Luis.

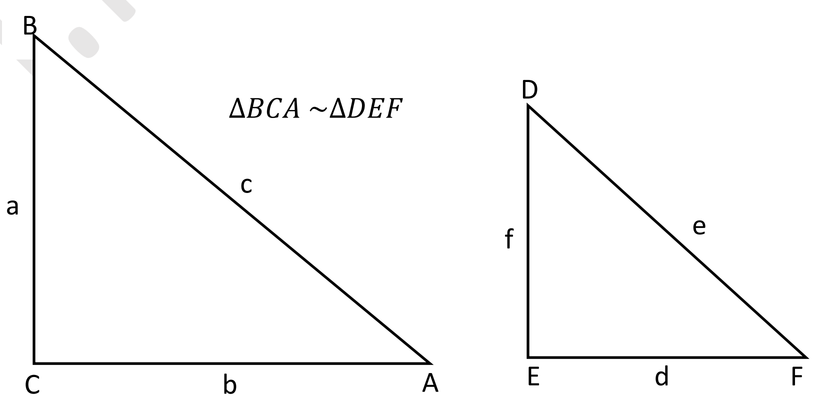
La casa de mi tía es semejante a la de mi abuela.

En fin, en muchas situaciones de la vida diaria se utiliza este término y en casi todos los casos se hace referencia a “*se parece a*”, cuando se comparan los objetos.

En matemática, la semejanza se utiliza en conjunto con la proporcionalidad. Para esto, se hacen modelos a escalas pequeñas para llevarlo a la realidad (edificios, puentes) e incluso dos figuras también son semejantes si tienen el mismo tamaño y forma. (Dos autos idénticos pero con colores diferentes). De lo anterior, se puede concluir que dos objetos son semejantes si guardan una proporción entre las medidas en cada una de sus partes respectivas.

8.1 DEFINICIÓN DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos figuras son semejantes si tienen exactamente la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño. En particular, dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes (igual medida) y sus lados homólogos son proporcionales (son los opuestos a ángulos iguales). La semejanza se denota por el símbolo **“~”** y se lee ***“semejante a”***



$\Delta BCA \sim \Delta DEF$

Los lados a y f, c y e, b y d se llaman homólogos.

Los ángulos $\hat{A}\ y\ \hat{F}$, $\hat{C}\ y\ \hat{E}$, $B\ y\ \hat{D}$ son homólogos de igual medida.

8.2 CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS.

Por las características y propiedades de los triángulos, existen criterios para verificar si los triángulos son semejantes. Estos criterios son:

8.2.1. Ángulo – Ángulo – Ángulo (A. A. A.)

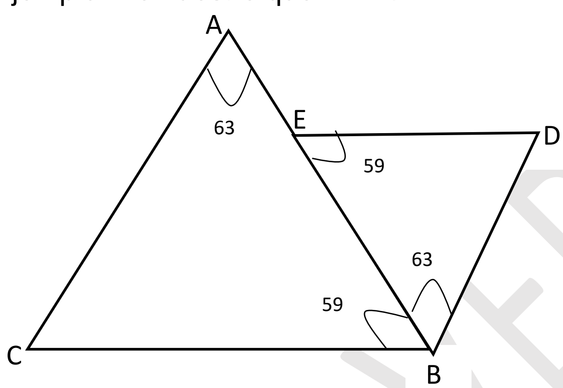
Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivos iguales.

El tercer ángulo respectivo, también, tiene la misma medida porque la suma de los tres ángulos es 180º.

Propiedad del tercer ángulo de dos triángulos

Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales respectivos, el tercero de ambos también son iguales

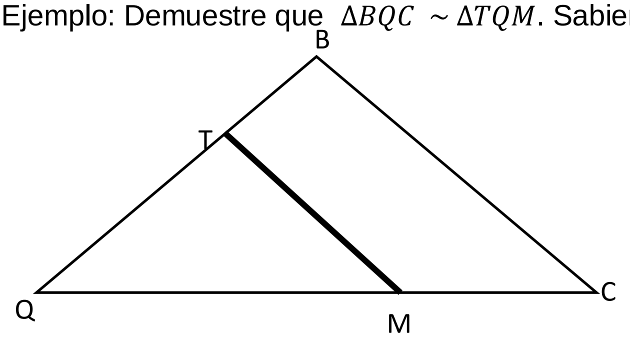
Ejemplo: Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta BED$



AFIRMACIÓN	JUSTIFICACIÓN
$< CAB \cong < DBE$	Ambos tienen medida de 63º
$< CBA \cong < DEB$	Ambos tienen medida de 59º
$< ACB \cong < BDE$	Propiedad del tercer ángulo de dos triángulos

Luego por el criterio A.A.A., $\Delta \boldsymbol{ABC} \sim \Delta \boldsymbol{BED}$

Ejemplo: Demuestre que $\Delta BQC \sim \Delta TQM$. Sabiendo que $\overline{TM}$ // $\overline{BC}$



AFIRMACIÓN	JUSTIFICACIÓN
$< TQM \cong < BQC$	Ambos triángulos comparten el mismo ángulo.
$< QTM \cong < QBC$	Son correspondientes. $\overline{TM}//\overline{BC}$ y $\overline{QB}\ es\ la\ transversal$
$< QMT \cong < QCB$	Son correspondientes. $\overline{TM}//\overline{BC}$ y $\overline{QC}\ es\ la\ transversal$

Luego por el criterio A.A.A., $\Delta\boldsymbol{BQC} \sim \Delta\boldsymbol{TQM}$

8.2.2. Lado – Lado – Lado (L.L.L)

Dos triángulos son semejantes si los tres lados respectivos, del primer triángulo, son proporcionales a los otros tres lados respectivos, del segundo triángulo.

Ejemplo: Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta BDC$

Solución:

Para que los tres lados sean proporcionales se debe cumplir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{12}{24} = \frac{10}{20} = \frac{5}{10}$$

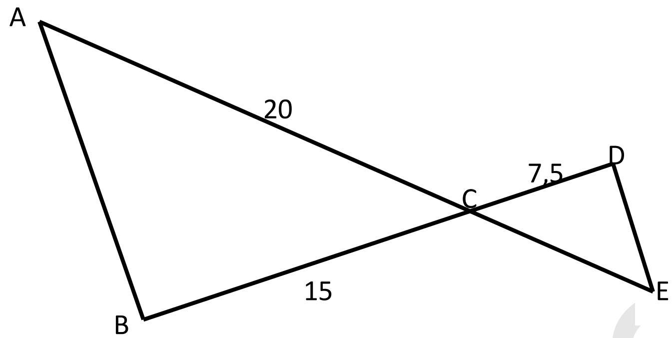
$$0{,}5 = 0{,}5 = 0{,}5$$

Como la razón es la misma se cumple el criterio L.L.L, luego $\Delta\boldsymbol{ABC} \sim \Delta\boldsymbol{BDC}$

8.2.3. Lado – Ángulo – Lado (L.A.L.)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman esos lados, tienen la misma medida.

Ejemplo: Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. Sabiendo que $\overline{AE} = 30$



Solución:

$\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC}$ = 30 – 20 = 10.

Para que los dos lados sean proporcionales entre sí, se debe cumplir:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{20}{10} = \frac{15}{7{,}5}$$

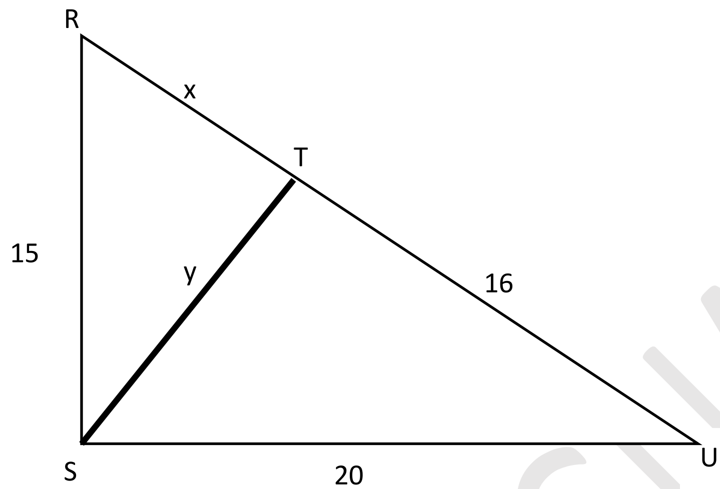
2 = 2 Como la razón es 2, los lados son proporcionales.

$< ACB \cong < ECD$, porque son opuestos por el vértice.

Ahora, aplicando el criterio L.A.L., $\Delta \boldsymbol{ABC} \sim \Delta \boldsymbol{EDC}$

EJEMPLOS RESUELTOS

Si $\Delta RSU \sim \Delta RTS$. Encuentre **x** y **y**



Solución:

Como $\Delta RSU \sim \Delta RTS$, entonces se cumple: $\frac{\overline{RS}}{\overline{RU}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{ST}}{\overline{SU}}$

Reemplazando se tiene: $\frac{15}{x+16} = \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$

$$\frac{15}{x+16} = \frac{x}{15}$$

Multiplicando en cruz: (15)(15) = x(x +16)

$225 = x^2 + 16x$, luego $x^2 + 16x - 225 = 0$ (trinomio de la forma $x^2 + bx + c$)

(x +25) (x – 9) = 0

x +25 = 0 o x – 9 = 0

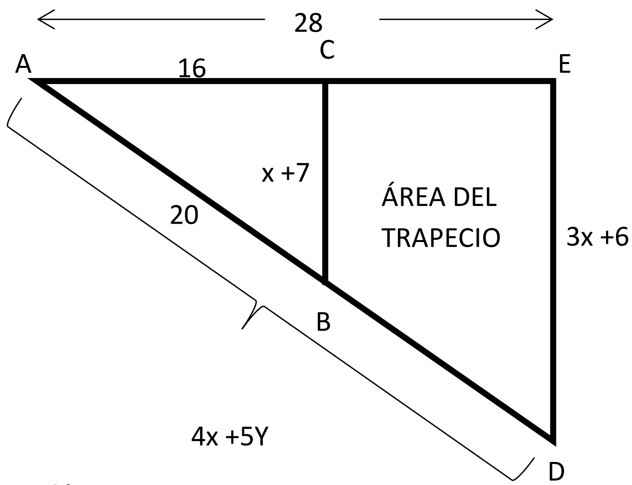
x = - 25 solución extraña. o ***x = 9***

Como x = 9 , se toma la otra proporción $\frac{x}{15} = \frac{y}{20}$, luego $\frac{9}{15} = \frac{y}{20}$

$y = \frac{(9)(20)}{15}$, $y = \frac{180}{15}$,

Se concluye que: ***y = 12***

Halle los valores de x y y. Encuentre el área del trapecio. Sabiendo que: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$



$$A = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

Solución:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{EA}}$ Porque $\Delta ABC \sim \Delta ADE.$

$\frac{20}{4x+5y} = \frac{x+7}{3x+6} = \frac{16}{28}$ Sustituyendo los valores.

$\frac{x+7}{3x+6} = \frac{16}{28}$ Por la cuarta proporcional.

$28(x+7) = 16(3x+6)$ Multiplicando en cruz.

$28x + 196 = 48x + 96$ Resolviendo la multiplicación.

$196 - 96 = 48x - 28x$

$100 = 20x$

$\boldsymbol{x = 5}$

$\frac{20}{4x+5y} = \frac{16}{28}$ Por la cuarta proporcional, ya que x = 5

$\frac{20}{4(5)+5y} = \frac{16}{28}$ Sustituyendo x =5

$\frac{20}{20+5y} = \frac{16}{28}$

20(28) = 16(20 +5y) Multiplicando en cruz.

560 = 320 +80y Resolviendo la multiplicación

560 – 320 = 80y

240 = 80y

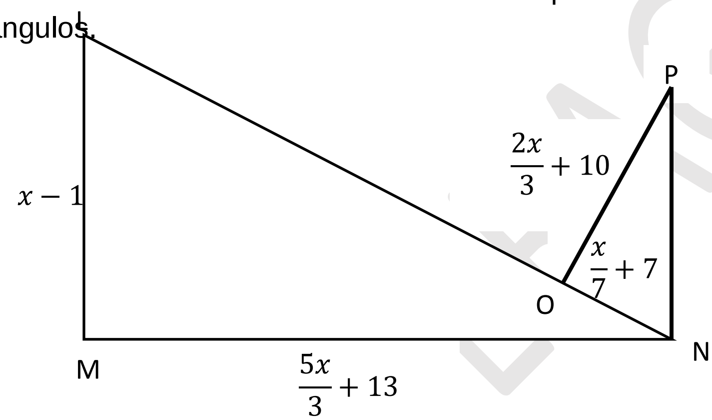
y = 3 Al dividir 240 entre 80

$b_1 = \overline{BC} = x + 7 = 5 + 7 = 12$ $b_2 = \overline{DE} = 3x + 6 = 3(5) + 6 = 15 + 6 = 21$

$h = \overline{CE} = 28 - 16 = 12$, luego $A = \frac{(b_1+b_2)h}{2}$, reemplazando $A = \frac{(12+21)12}{2}$

$A = \frac{(33)12}{2} = \frac{396}{2} = 198$. ***Área del trapecio es 198***

Halle el valor de x . Encuentre $\overline{PN}$. Sabiendo que: $\Delta LMN \sim \Delta NOP$. Ambos son rectángulos.



Solución:

$$\frac{\overline{LM}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{NL}}{\overline{PN}}$$ Porque $\Delta LMN \sim \Delta NOP$

Sustituyendo en la proporción para buscar el valor de x.

$$\frac{x-1}{\frac{x}{7}+7} = \frac{\frac{5x}{3}+13}{\frac{2x}{3}+10}$$

Multiplicando en cruz.

$$(x-1)\left(\frac{2x}{3}+10\right) = \left(\frac{x}{7}+7\right)\left(\frac{5x}{3}+13\right)$$

$$\frac{2x^2}{3} + 10x - \frac{2x}{3} - 10 = \frac{5x^2}{21} + \frac{13x}{7} + \frac{35x}{3} + 91$$ Resolviendo la multiplicación.

$14x^2 + 210x - 14x - 210 = 5x^2 + 39x + 245x + 1911$	Se multiplica toda la ecuación por el m.c.m. que es 21.
$14x^2 + 210x - 14x - 210 - 5x^2 - 39x - 245x - 1911 = 0$	Se agrupan de un lado de la ecuación.
$9x^2 - 88x - 2121 = 0$	Se reducen los semejantes
	Es trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

1x	101	101
9x	-189	-21
9	-88	2121

Luego x – 21 =0 y 9x +101=0

x =21 y x =-101/9 solución extraña.

Como el ΔNOP es rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras

$$\overline{PO} = \frac{2x}{3} + 10 = \frac{2(21)}{3} + 10 = \frac{42}{3} + 10 = 14 + 10 = 24$$

$$\overline{ON} = \frac{x}{7} + 7 = \frac{(21)}{7} + 7 = 3 + 7 = 10$$

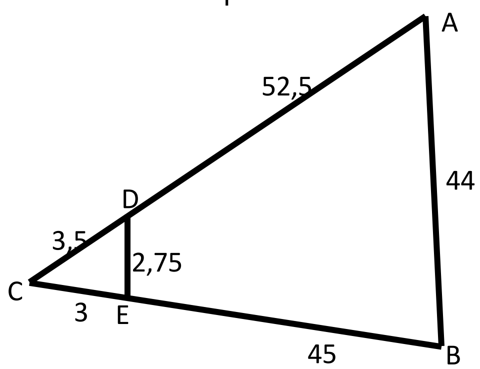
$$\overline{PN} = \sqrt{(\overline{PO})^2 + (\overline{ON})^2} = \sqrt{(24)^2 + (10)^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = \mathbf{26}$$

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 8.1(LOS IMPARES)

I parte: Valiéndose de los criterios de semejanza de triángulos, resuelva los siguientes ejercicios propuestos. Utilice en algunos ejemplos, los ángulos alternos internos, alternos externos, correspondientes, opuestos por el vértice,ya que tienen la misma medida.

1.

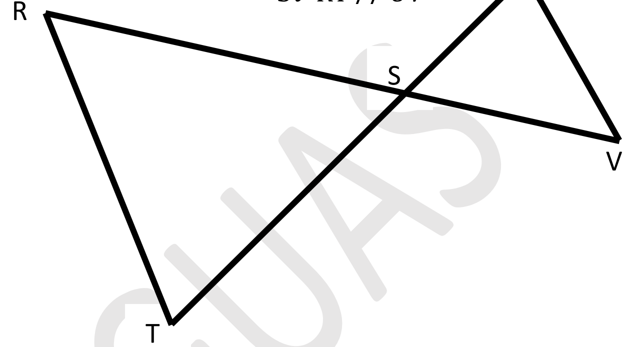
Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DEC$



2.

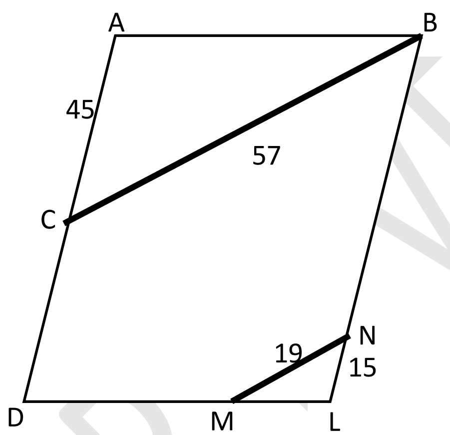
Demuestre que $\Delta RST \sim \Delta VSU$

$Si\ \overline{RT}//\overline{UV}$



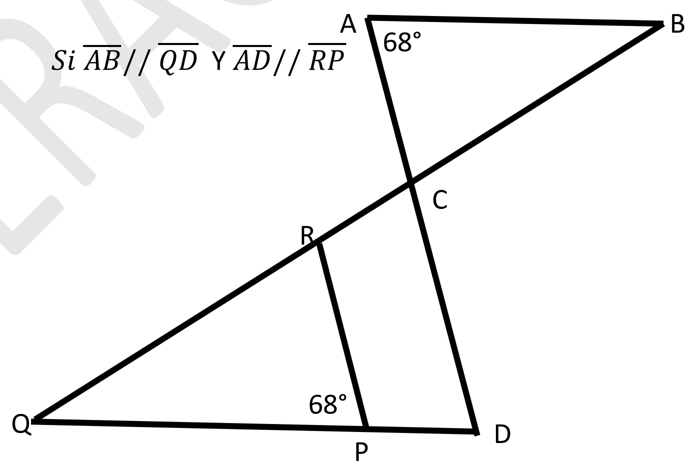
3. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta LMN$

Si $AD//\overline{BL}$ Y $\overline{CB}//\overline{MN}$

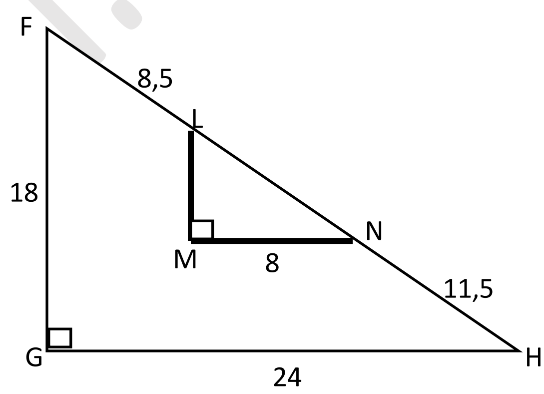


4. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$Si\ \overline{AB}//\overline{QD}$ Y $\overline{AD}//\overline{RP}$



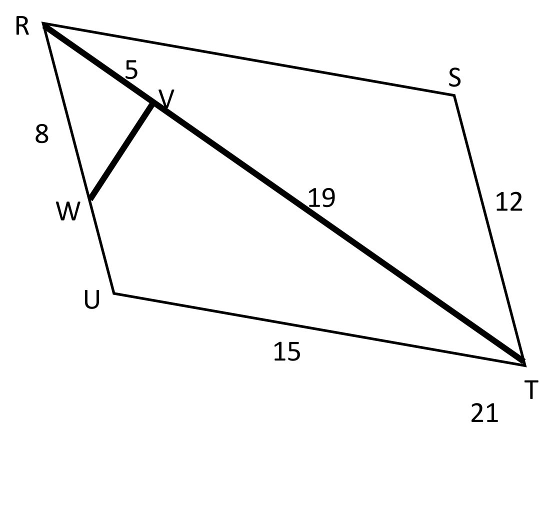
5. Demuestre que $\Delta FGH \sim \Delta LMN$



Aplique del teorema de Pitágoras

6. Demuestre que $\Delta RST \sim \Delta RVW$

$Si\ \overline{VW} = \overline{UW}$

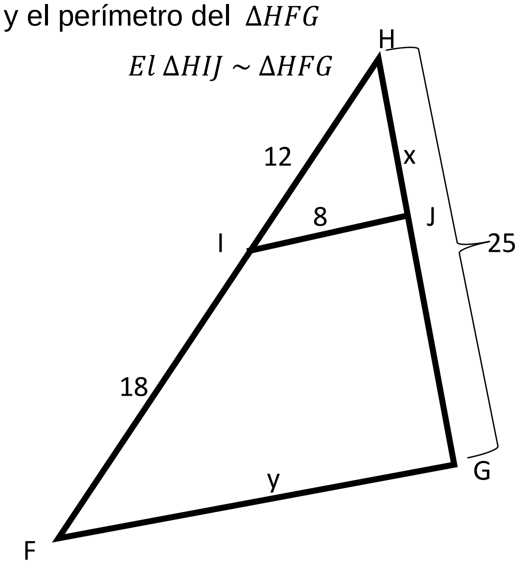


II Parte: Tomando en cuenta que los triángulos son semejantes:

1. Halle los valores de “x” y “y”

y el perímetro del ΔHFG

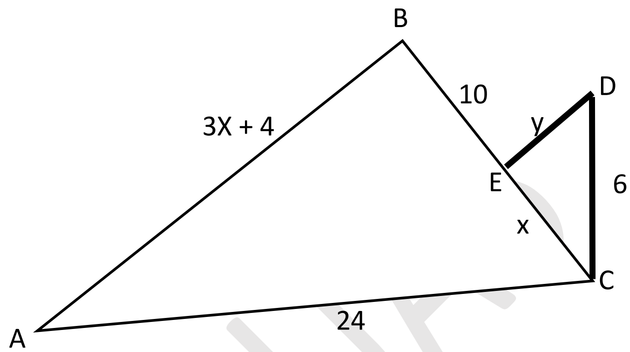
$El\ \Delta HIJ \sim \Delta HFG$



2. Halle los valores de “x” y “y”

y el perímetro del ΔABC

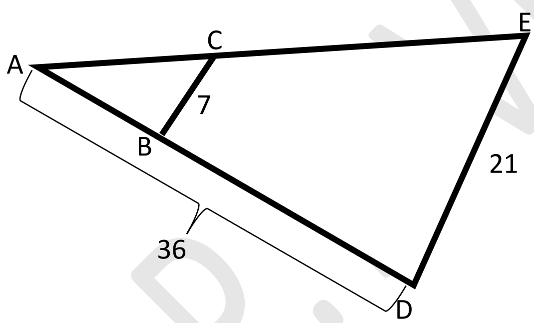
$El\ \Delta ABC \sim \Delta CED$



3. Si el perímetro del ΔABC es 34.

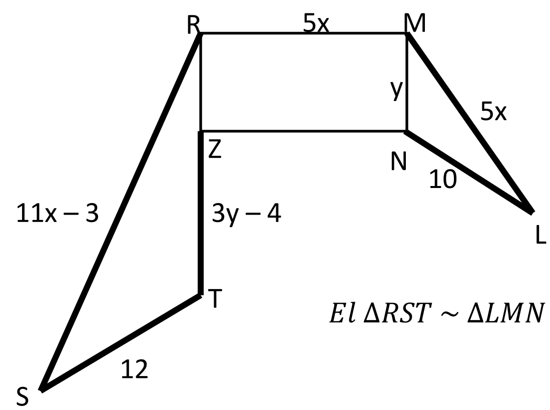
Halle el valor de $\overline{CE}$.

$El\ \Delta ABC \sim \Delta ADE$



4. Encuentre los valores de “x y ”y”

y área del rectángulo.

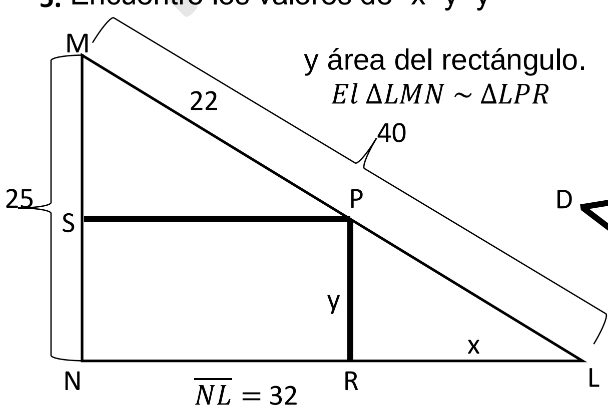


$El\ \Delta RST \sim \Delta LMN$

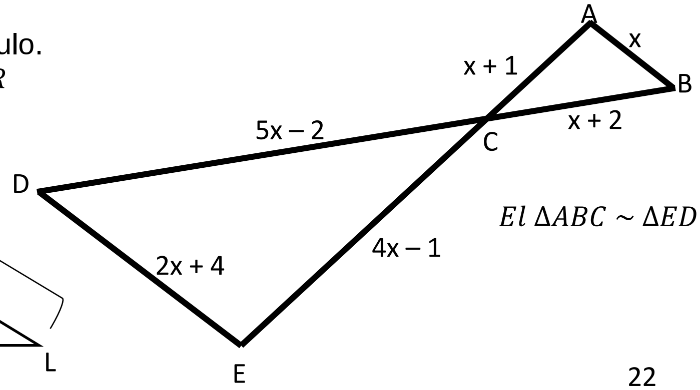
5. Encuentre los valores de “x” y “y”

y área del rectángulo.

$El\ \Delta LMN \sim \Delta LPR$



6. Halle el valor de x y $\overline{AE}$



$El\ \Delta ABC \sim \Delta EDC$

Unidad

9

Analiza el concepto de trigonométrica y da solución a diferentes situaciones referente a la medición de triángulos

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA

Se cree que hace más 3 000 años, las culturas babilónicas y egipcias utilizaban la trigonometría para efectuar medidas en la agricultura y para la construcción de pirámides. Su desarrollo surge por los primeros esfuerzos para el avance de la astronomía, para mejorar la navegación y el cálculo del tiempo.

El estudio de la trigonometría se desarrolló en Grecia, en donde se destaca el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea, primer astrónomo, científico creador de una tabla trigonométrica para resolver triángulos. Fue uno de los principales desarrolladores de la Trigonometría y es considerado el ***Padre de la trigonometría***. Tres siglos después, Claudio Tlomeo, astrónomo y matemático, realizó importantes contribuciones a la trigonometría, publicado en su libro ***Almagesto***.

La trigonometría pasó por la India y Arabia donde era utilizada en la Astronomía. Y desde Arabia se difundió por Europa, donde finalmente se separa de la Astronomía para convertirse en una rama independiente y parte de la matemática

A finales del siglo VIII los astrónomos árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X ya habían completado la función seno y las otras cinco funciones. También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría. A principios del siglo XVII, el matemático John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.

A mediados del siglo XVII Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tan x. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis, donde todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Para el siglo XVIII, el matemático Suizo Leonhard Euler define formalmente las 6 funciones trigonométricas, útiles hasta la fecha.

El precursor más importante de la trigonometría fue el filósofo y matemático griego, Pitágoras de Samos (572 a.c.), famoso por establecer el teorema que lleva su nombre.

9.1. ORIGEN Y CONCEPTO

El Origen de la palabra TRIGONOMETRÍA, proviene de los vocablos griegos "trigonos" (triángulos) y "metría" (medición), que significa *"medición de triángulos".*
La Trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

En general, la trigonometría es usada para calcular distancias, alturas y áreas, se aplica en termodinámica, electricidad, navegación, física, química, ingeniería, astronomía, entre otras. Gracias a la trigonometría se pudo medir la altura del monte Everest, considerada la montaña más alta del mundo.

9.2. PLANO CARTESIANO O SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Un sistema de coordenadas o cartesianas lo forman dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el origen.

La recta horizontal se llama eje de las X o eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje de las Y o eje de las ordenadas.

El punto de intersección (O), donde se cortan los dos ejes, es el origen de coordenadas.

Las coordenadas de un punto cualquiera vendrán dadas por las proyecciones de la distancia entre el punto y el origen sobre cada uno de los ejes. Las coordenadas de un punto cualquiera P se representan por P(x, y).

La primera coordenada se mide sobre el eje de abscisas, y se la denomina coordenada *x* del punto o abscisa del punto.

La segunda coordenada se mide sobre el eje de ordenadas, y se le llama coordenada *y* del punto u ordenada del punto.

La longitud del segmento que une al origen con el punto P, recibe el nombre de radio vector.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes iguales y a cada una de ellas se les llama cuadrante. Los cuadrantes se leen en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando por la parte superior derecha y se representa por las letras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. También, se acostumbra colocarle los números romanos I, II, III y IV. El signo de la abscisa y de la ordenada dependerá del cuadrante donde se ubique el punto. El radio vector se considera siempre positivo.

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

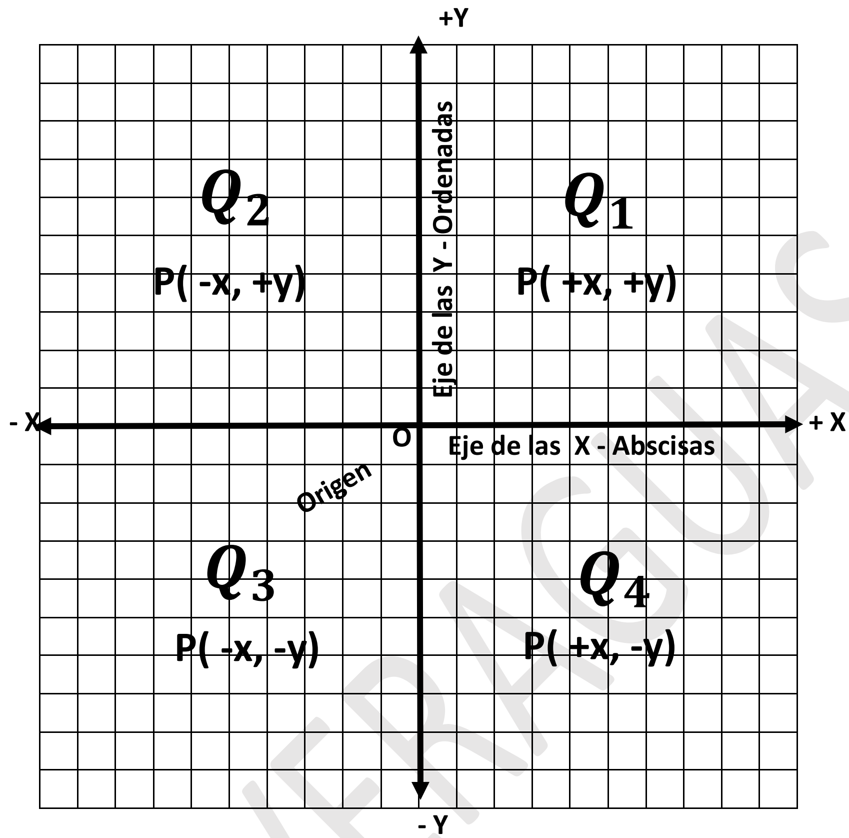
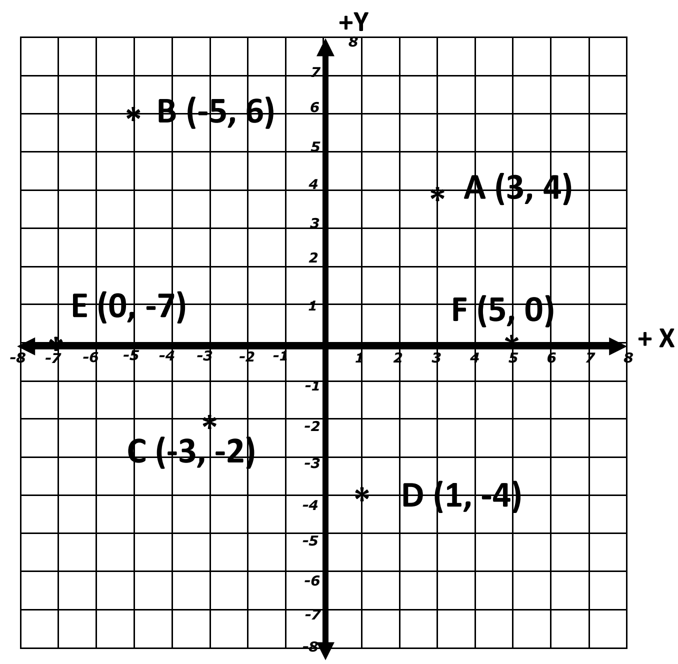


FIGURA 9.1

Ejemplos

Ubique los siguientes puntos en el plano cartesiano.

A (3, 4)	D (1, -4)
B (-5, 6)	E (0, -7)
C (-3, -2)	F (5, 0)



9.3. ÁNGULOS TRIGONOMÉTRICOS

9.3.1. DEFINICIÓN

Un ángulo trigonométrico es aquel formado por dos rayos que tiene un punto en común llamado vértice. Los dos rayos que forman el ángulo se llaman: Lado inicial (permanece fijo) y el otro lado terminal (rotación).

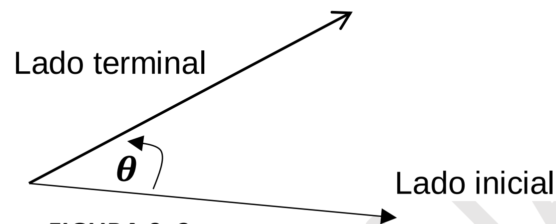


FIGURA 9. 2

9.3.2. *CLASIFICACIÓN*

Los ángulos trigonométricos se clasifican en:

a. **Ángulo positivo**

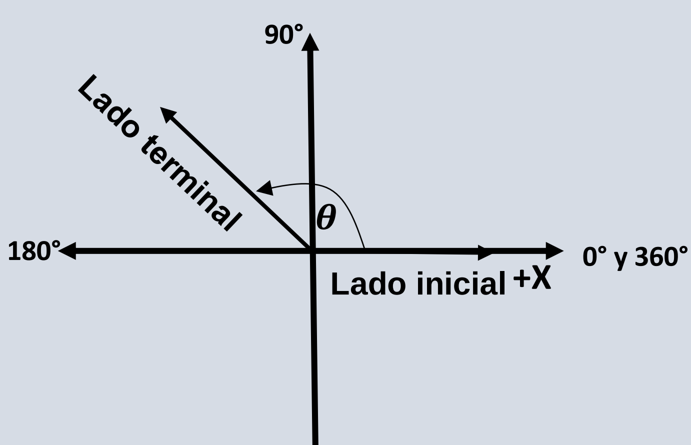
Es aquel que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj.
Ejemplos: 67º, 89º, 180º, 275º, 345º

b. **Ángulo negativo**

Es aquel que tiene rotación en sentido a las manecillas del reloj.
Ejemplos: -38º, -135º, -370º, -670º

c. ***Ángulo en su posición normal o estándar***

Un ángulo trigonométrico está en su posición normal, si su vértice coincide con el origen del sistema cartesiano y su lado inicial coincide con el eje "x" positivo. Cuando un ángulo, está en posición normal, el lado final puede estar en uno de los cuadrantes, en cuyo caso se dice que éste pertenece a tal cuadrante.



Observe que el lado inicial del ángulo coincide con el eje de las x positivo y el lado terminal está en el cuadrante II.

FIGURA 12. 3

d. Ángulo cuadrante

Es aquel ángulo cuyo lado terminal coincide con uno de los ejes.
Ejemplo: 90º, 180º, 270º y 360º, 450º.

e. Ángulo de referencia o relacionado:

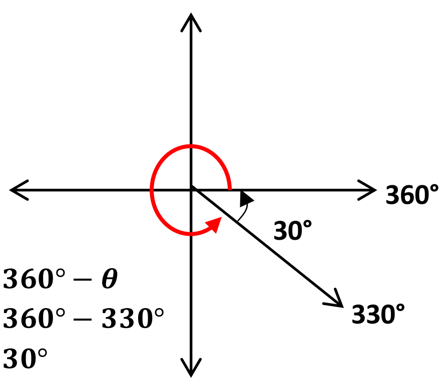
Es aquel ángulo positivo que se forma solo y exclusivamente con el eje de las X.
Se denota por $\boldsymbol{\theta_R}$.

Dependiendo del cuadrante se puede utilizar lo siguiente:

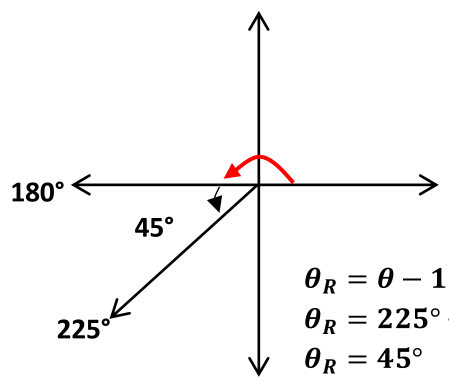
Q1: $\boldsymbol{\theta_R = \theta}$ **Q3:** $\boldsymbol{\theta_R = \theta - 180^\circ}$

Q2: $\boldsymbol{\theta_R = 180^\circ - \theta}$ **Q4:** $\boldsymbol{\theta_R = 360^\circ - \theta}$

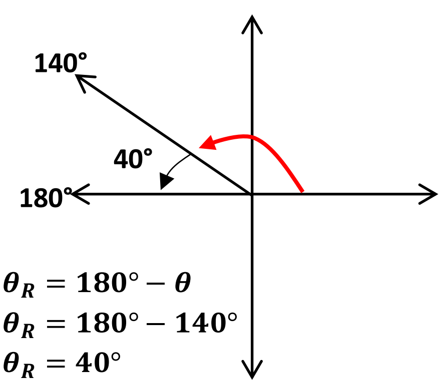
Ejemplos: Halle el ángulo relacionado de: 330º, 225º, 140º, -300º



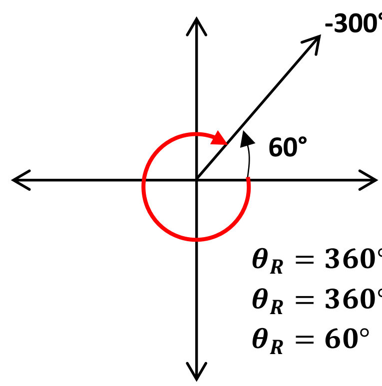
$\boldsymbol{\theta_R = 360^\circ - \theta}$
$\boldsymbol{\theta_R = 360^\circ - 330^\circ}$
$\boldsymbol{\theta_R = 30^\circ}$



$\boldsymbol{\theta_R = \theta - 180^\circ}$
$\boldsymbol{\theta_R = 225^\circ - 180^\circ}$
$\boldsymbol{\theta_R = 45^\circ}$



$\boldsymbol{\theta_R = 180^\circ - \theta}$
$\boldsymbol{\theta_R = 180^\circ - 140^\circ}$
$\boldsymbol{\theta_R = 40^\circ}$



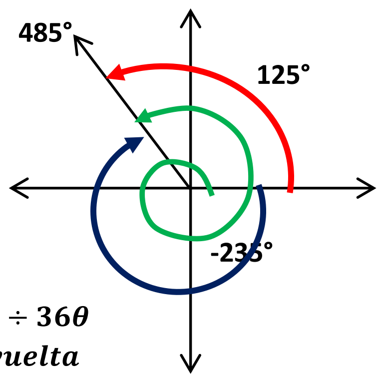
$\boldsymbol{\theta_R = 360^\circ - \theta}$
$\boldsymbol{\theta_R = 360^\circ - 300^\circ}$
$\boldsymbol{\theta_R = 60^\circ}$

f. Ángulos Coterminales

Son aquellos ángulos que colocados en su posición normal tienen el mismo lado terminal. Se denota por $\boldsymbol{\theta_c}$. Un ángulo coterminal es el residuo o diferencia de la división del ángulo dado entre 360°. El entero de la división es el número de vueltas que gira el ángulo. Otro ángulo coterminal es aquel ángulo en giro contrario que resulte de la resta del ángulo encontrado y 360.

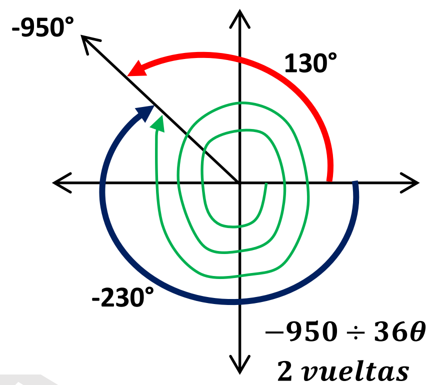
Ejemplos: Halle ángulos Coterminales de

485º



$\mathbf{485 \div 36\theta}$
$\mathbf{1\ vuelta}$
$\boldsymbol{\theta_c = 125°}$ **y**
$\boldsymbol{\theta_c = -235°}$

-950º



$\mathbf{-950 \div 36\theta}$
$\mathbf{2\ vueltas}$
$\boldsymbol{\theta_c = -230°}$ **y**
$\boldsymbol{\theta_c = 130°}$

9.4. CONCEPTOS DE ABSCISA, ORDENADA Y RADIO VECTOR

Si se ubica un punto P(x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares y se traza una recta desde el origen al punto P y una perpendicular desde el eje de las x al mismo punto P, se formará un triángulo rectángulo mediante el cual, se podrá obtener el valor de la abscisa, ordenada y el radio vector.

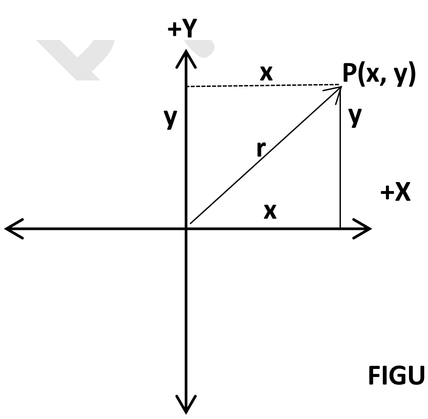


FIGURA 11. 4

r = radio vector y = ordenada x = abscisa

De lo anterior, se define:

La abscisa: Es la distancia desde el punto P hasta el eje vertical, o eje y.

La ordenada: Es la altura desde el punto P hasta el eje horizontal, o eje x.

El radio vector: es la distancia rectilínea que va desde el origen de coordenadas hasta el punto P.

Es importante destacar que el signo de la abscisa y de la ordenada depende del cuadrante donde esté ubicado el radio vector o el punto P, el radio vector siempre se considera positivo.

Por construcción, el triángulo formado es rectángulo, por lo que se aplica el ***Teorema de PITÁGORAS. (Ver figura 11.4)***

TEOREMA:

EN UN TRIÁNGULO RECTANGULO, EL CUADRADO DE LA LONGITUD DE LA HIPOTENUSA (r) ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADO DE LAS LONGITUDES DE LOS CATETOS (x, y).

$$\boxed{\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2,}}$$

De la ecuación anterior, despejando, se concluye que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Ejemplo 1
Encuentre el valor de la abscisa, sabiendo que el radio vector vale 15 y la ordenada es – 9. P está en Q_3. Trace el punto.
Solución:
r = 15
y = - 9
x = ?

Aplicando el teorema de Pitágoras
Se tiene que:

$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$

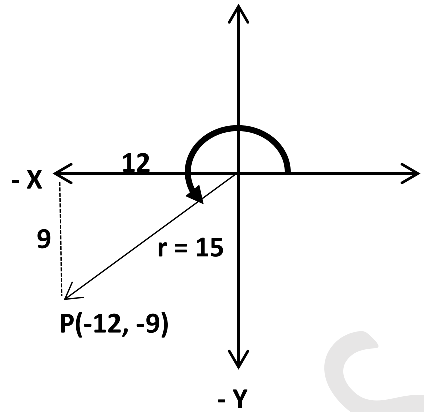
$x = \pm\sqrt{(15)^2 - (-9)^2}$

$x = \pm\sqrt{225 - 81}$

$x = \pm\sqrt{144}$

$x = \pm 12$

$x = \ -12$, porque P esta en Q_3.



Ejemplo 2

Halle los valores de las coordenadas faltantes sabiendo que x = 6 y r = $\sqrt{80}$. Trace la gráfica.

Solución:

x = 6
r = $\sqrt{80}$
y = ?
Aplicando el teorema de Pitágoras
Se tiene que:

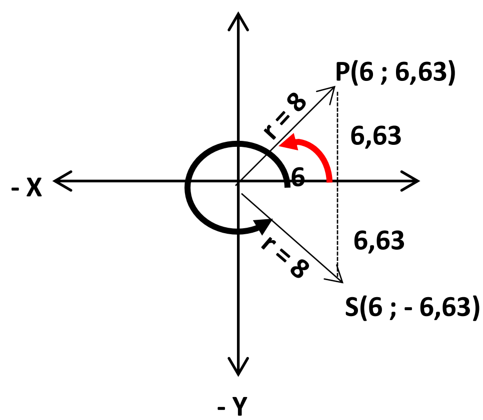
$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \pm\sqrt{(\sqrt{80})^2 - (6)^2}$

$y = \pm\sqrt{80 - 36}$

$y = \pm\sqrt{44}$

$y = \pm 6{,}63$



Dos respuestas, porque no se especifica un sólo punto.

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 9.1

Resuelva los siguientes ejercicios.

1. En el sistema de coordenadas rectangulares, trace la línea que pasa por los puntos dados.
   a. A(1, 2) y B(-2, 5)
   b. C(3 , 0) y B(0, 6)
   c. A(3, -2) y B(-4, 5)
   d. A(-3 , -7) y B (3; 4,5)
2. Dibuje el triángulo cuyos vértices son: A(0,6); B(3,0); C(-3,0), especifique el nombre del triángulo dibujado.
3. Construya los ángulos dados, señale su lado inicial, su lado terminal e indique el sentido de rotación:
   a. 30°
   b. 435°
   d. -840°
   e. – 225°
4. Encuentre un ángulo coterminal positivo y un negativo de los siguientes ángulos:
   a. 75°
   b. -55°
   d. 930°
   e. – 1300°
5. Construya y halle el ángulo de referencia o relacionado de:
   a. 280°
   b. – 330°
   d. 315°
   e. 180°
6. Construya los ángulos dados en su posición normal.
   a. 75°
   b. 245°
   d. – 50°
   e. – 420°
7. Encuentre el valor del elemento faltante y trace la gráfica, tome en cuenta la ubicación del punto P o de los puntos.
   a. x = 4 y = 4,7
   b. x = 7 r = $\sqrt{75}$, P está en Q_4
   d. y = - 6 r = $\sqrt{125}$; P está en Q_3
   e. x = -18 r = 30; P está en Q_2

Unidad

10

Transforma ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular de grados a radianes y viceversa.

MEDIDAS ANGULARES Y CIRCULARES

El uso de las medidas de los ángulos data de la era de los desaparecidos babilónicos. Se cree que los babilonios determinaron aproximaciones de medidas con ángulos. Evidencias de estas prácticas fueron halladas en varias tablas grabadas sobre arcilla. Los egipcios; por su parte, dividieron a los 360 grados de la eclíptica en 36 secciones de 10 grados cada uno; cada diez grados contenía una constelación de estrellas, alineadas a lo largo de la eclíptica, todos estos cálculos se realizaban para determinar las horas de la noche y de las estaciones.

Fueron los árabes los que asentaron el uso del sistema sexagesimal en la cultura moderna y por curiosidad, este sistema de medida sigue funcionando a la perfección. Hoy día, se utilizan otro sistema adoptado universalmente cuya medida de ángulos se basan en radianes, los ángulos se pueden calcular en diferentes unidades de medidas. Para esto, es necesario conocer los diferentes sistemas de medidas de los ángulos y sus relaciones. Es importante, para este estudio, tomar en cuenta la rotación del ángulo.

La rotación del ángulo se puede efectuar en dos sentidos, tomando en cuenta un punto fijo (llamado vértice), una posición inicial (llamado lada inicial) y una posición final (llamado lado terminal):

- ✓ Girando en sentido a las manecillas del reloj, en este caso el ángulo tiene un valor negativo. (figura 10.1)
- ✓ Girando en sentido contrario a las manecillas del reloj, en este caso el ángulo tiene valor positivo. (figura 10.2)

Figura 10.1

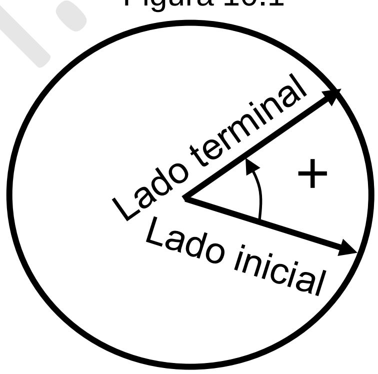
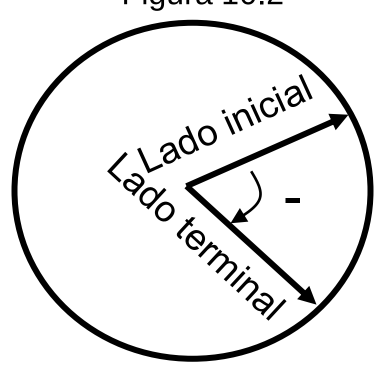


Figura 10.2



10.1. MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Muchos son los sistemas paras medir ángulos, los más utilizados son el sistema sexagesimal y el sistema circular.

10.1.1. Sistema sexagesimal

En el sistema sexagesimal se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales; y un ángulo de 1° sexagesimal es la medida de aquel que se genera cuando el giro, en el mismo sentido de las manecillas del reloj, del lado terminal es de 1/360 parte de una vuelta completa. Cada grado (°) se considera dividido en 60 partes iguales llamados minutos (‘) y cada minuto en 60 partes iguales llamados segundos (‘’). La unidad de medida está basada en grados. Nos indican qué tan abierto es un ángulo, y son la herramienta fundamental para la Trigonometría. En una circunferencia, que es la abertura total, caben 360°. En el ángulo llano o semicírculo hay 180°, y en el ángulo Recto hay una medida de 90°.

$$90° \approx 89° \, 59' \, 60''$$

10.1.2. Sistema circular

El sistema circular o radián se define como la medida del ángulo que encierra un arco de la circunferencia de longitud igual al radio de ésta. Es decir, una circunferencia de radio “r“, un radián, es la medida del ángulo que se forma con el arco de la circunferencia cuya longitud es “r“. La unidad de medida está basada en radianes(rad).

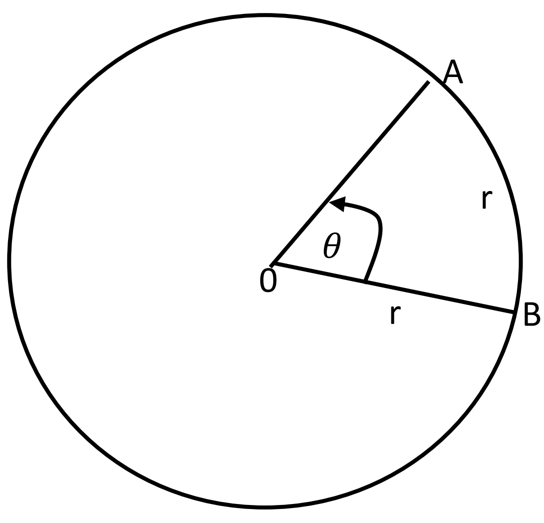


Figura 10.3

El valor de un ángulo de un giro es de 2π radianes. El número π es la relación que existe entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Esta relación se mantiene constante para cualquier circunferencia.

10.2. EQUIVALENCIA DE UN ÁNGULO EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL, EL SISTEMA CIRCULAR Y VICEVERSA.

10. 2.1. De grados a radianes

En trigonométrica, La equivalencia entre grados y radianes es importante conocerla, la utilización de esta conversión ayuda a de simplificar en operaciones cuando se utilizan ángulos. En el sistema sexagesimal, la equivalencia se resume a la siguiente fórmula:

$$1° = \frac{\pi}{180°}$$

Observaciones

a. Un ángulo recto es equivalente a $\frac{\pi}{2}$
b. Una revolución es equivalente a 2π

Ejemplos de transformaciones de ángulos enteros de grados a radianes.

45°

Solución: $45° \text{ x } \frac{\pi}{180°} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ se simplifica el 45 y el 180, ambos los divide el 9

.

135°

Solución: $135° \text{ x } \frac{\pi}{180°} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}}$ se simplifica el 135 y el 180, ambos los divide el 45

380°

Solución: $380° \text{ x } \frac{\pi}{180°} = \boldsymbol{\frac{19\pi}{9}}$ se simplifica el 380 y el 180, ambos los divide el 20.

Ejemplos de transformaciones de ángulos rectos a radianes.

8 ángulos rectos

Solución: $8 \times \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{4\pi}$ se simplifica el 8 y el 2.

6,5 ángulos rectos

Solución: $6{,}5 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\mathbf{65}}{\mathbf{10}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\mathbf{13\pi}}{\mathbf{4}}$ se simplifica el 65 y el 10.

Ejemplos de transformaciones de ángulos con revoluciones a radianes.

6 revoluciones

Solución: $6 \times 2\pi = \mathbf{12\pi}$

3,4 revoluciones

Solución: $3{,}4 \times 2\pi = 6{,}8\pi = \frac{68}{10}\pi = \frac{\mathbf{34\pi}}{\mathbf{5}}$

Ejemplos de transformaciones de grados(°), minutos(‘) y segundos(‘‘) a radianes.

11° 6’ 40’’

Solución:

1° es equivalente a 60’ (minutos) y a 3600’’ (segundos)

1’ (minuto) es equivalente a 60’’ (segundos)

$= \left(11 + \frac{6}{60} + \frac{40}{3600}\right) \times \frac{\pi}{180°}$ Se aplicó la equivalencia

$= \left(11 + \frac{1}{10} + \frac{1}{90}\right) \times \frac{\pi}{180°}$ se simplificaron las fracciones.

$= \left(\frac{990+9+1}{90}\right) \times \frac{\pi}{180°}$ se buscó el m.c.m.

$= \left(\frac{1000}{90}\right) x \ \frac{\pi}{180°} \qquad = \frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{81}}$ Se simplificó

19° 41’ 15’’

Solución:

1° es equivalente a 60’ (minutos) y a 3600’’ (segundos)

1’ (minuto) es equivalente a 60’’ (segundos)

$= \left(19 + \frac{41}{60} + \frac{15}{3600}\right) x \ \frac{\pi}{180°}$ Se aplicó la equivalencia

$= \left(19 + \frac{41}{60} + \frac{1}{240}\right) x \ \frac{\pi}{180°}$ se simplificaron las fracciones.

$= \left(\frac{4560+164+1}{240}\right) x \ \frac{\pi}{180°}$ se buscó el m.c.m.

$= \left(\frac{4725}{240}\right) x \ \frac{\pi}{180°}$

$= \frac{\mathbf{7\pi}}{\mathbf{64}}$ Se simplificó

10.2.2. De radianes a grados

De igual manera es importante conocer la transformación contraria de los ángulos, en este caso, la de radianes a grados. En el sistema circular, la equivalencia se reduce a la siguiente fórmula:

$$1 \ radián = \frac{180°}{\pi}$$

Ejemplos de transformaciones de ángulos enteros de radianes a grados.

$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

Solución: $\frac{\pi}{6} \ x \ \frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$ Se multiplica por la equivalencia.

= 30° Se simplifican los números 180 con 6 y el símbolo π

$\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{9}}$

Solución: $\frac{5\pi}{9}$ x $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$ Se multiplica por la equivalencia.

= 100° se simplifican los números 180 con 9 y el símbolo π

$\frac{\mathbf{23\pi}}{\mathbf{12}}$

Solución: $\frac{23\pi}{12}$ x $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$ Se multiplica por la equivalencia.

= 345° Se simplifican los números 180 con 12 y el símbolo π

Ejemplos de transformaciones de radianes a grados(°), minutos(‘) y segundos(‘‘).

$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{81}}$

Solución: $\frac{\pi}{81}$ x $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$ Se multiplica por la equivalencia.

= $\frac{20°}{9}$ Se simplifican los números 180 y 81 el símbolo de π.

Operación	Cociente	Cociente x divisor	Dividendo menos el resultado de la multiplicación	Residuo se multiplica por 60°
$20 \div 9 = 2$	**2°**	2x9 = 18	20 – 18 = 2	$\frac{2}{9}$ x 60° = $\frac{40°}{3}$
$40 \div 3 = 13$	**13’**	13x3 =39	40 – 39 = 1	$\frac{1}{3}$ x 60° = 20
20	**20’’**			
La solución es 2° 13’ 20’’				

$\mathbf{\frac{7\pi}{64}}$

Solución: $\frac{7\pi}{64}$ x $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$ Se multiplica por la equivalencia.

$= \frac{315°}{16}$ Se simplifican los números 180 y 64 el símbolo de π.

Operación	Cociente	Cociente x divisor	Dividendo menos el resultado de la multiplicación	Residuo se multiplica por 60°
$315 \div 16 = 2$	**19°**	19x16 = 304	315–304 = 11	$\frac{11}{16}$ x 60° = $\frac{165°}{4}$
$165 \div 4 = 13$	**41'**	41x4 =164	165– 164 = 1	$\frac{1}{4}$ x 60° = 15°
15	**15''**			
La solución es 19° 41' 15'				

Existen otra equivalencia para el radián, que proviene de la división de 180 entre el valor de π (3,1416…) cuyo resultado es el siguiente:

1 rad = $57,29583333 \ldots = 57,2958\overline{3}$ = 57° 17' 45''

Ejemplo 1:

5,76 rad

Solución: $(5{,}76)\left(\frac{180}{\pi}\right)$

= $(5{,}76)(57,2958)$

= 330, 023808 cociente **330°**

Residuo 0, 023808 x 60

= 1, 42848 cociente **1'**

Residuo 0, 42848 x 60

= 25, 7088 cociente **25''** Sol. **330° 1' 25´´ aproximadamente**

Ejemplo 2: **3,527 rad**

Solución: $(3,527)\left(\frac{180}{\pi}\right)$

$= (3{,}527)(57,2958)$

= 202, 0822866 cociente **202°**

Residuo 0, 0822866 x 60

= 4, 937196 cociente **4’**

Residuo 0, 937196 x 60

= 56, 23176 cociente **56’’**

Sol. **202° 4’ 56’’ aproximadamente**

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 10.1

(SÓLO LOS IMPARES)

I parte: Transformar los siguientes ángulos de grados a radianes. Simplifique.

1. 90°
2. 120°
3. 135°
4. 140°
5. 215°
6. 270°
7. 333° 30’
8. 25° 18’ 45’’
9. 8° 53’ 20’’
10. 64° 41’ 15’’
11. 44° 26’ 40’’
12. 11° 6’ 40’’

II parte: Haga las siguientes conversiones a radianes.

1. 8, 2 revoluciones
2. 6, 9 revoluciones
3. 4, 32 revoluciones
4. 3, 4 ángulos rectos
5. 4, 8 ángulos rectos
6. 9, 8 ángulos rectos

III parte: Transforme los siguientes ángulos a radianes a grados.

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{13\pi}{36}$
3. $\frac{25\pi}{36}$
4. $\frac{11\pi}{6}$
5. $\frac{50\pi}{9}$
6. $\frac{23\pi}{12}$
7. $\frac{7\pi}{8}$
8. $\frac{5\pi}{72}$
9. $\frac{13\pi}{16}$
10. $\frac{20\pi}{81}$
11. 4,2 rad
12. 2,71 rad

Unidad

11

Transforma ángulos del sistema sexagesimal al sistema circular de grados a radianes y viceversa.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

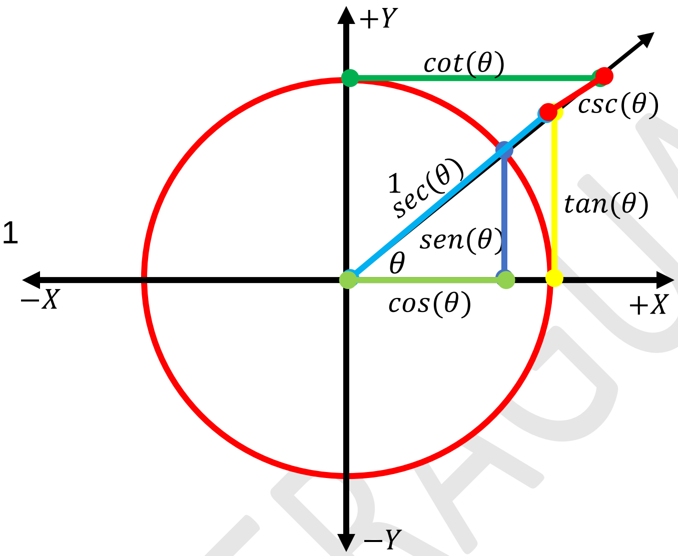
La historia de las razones trigonométricas se remonta a la época babilónica, aproximadamente 100 a.c. Por el hecho de considerar el cielo dentro de una esfera, algunos griegos como Hiparco de Nicea (Nicea,190 a.c. – 120 a.c.) y Claudio Ptolomeo (Ptolemaida,100 d.c. – Canopo, 170 d.c.) realizaron estudios para observar el comportamiento del sol, la luna y las estrellas, y las distancias existentes entre estos cuerpos a través de la medición de ángulos. Para el año 500, el astrónomo y matemático hindú Aria Bhatta (475-550 d.c.) estudió el concepto de "seno" con el nombre de "ardhá-jya, que significa "mitad - cuerda"; tal vez, por un error de traducción o quizás, porque las palabras árabes no utilizan vocales este concepto se tradujo a "sinus" y de allí al español al "seno"; los estudios realizados tenían que ver con el movimiento de unas recta que gira en sentido a las manecillas del reloj, alrededor de un punto fijo, y al medir las longitudes de las semicuerdas estas se les asoció el ángulo originado por el giro de las rectas. Diversos matemáticos posteriormente realizaron estudios y aportaciones a las funciones trigonométricas. La obra de Leonhard Euler "Introductio in analysin infinitorum" (1748) fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa, definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas "Fórmulas de Euler".

Luego, se estableció una relación para cualquier triángulo semejante, en el que debe existir una relación constante entre la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas.

11.1. DEFINICIÓN

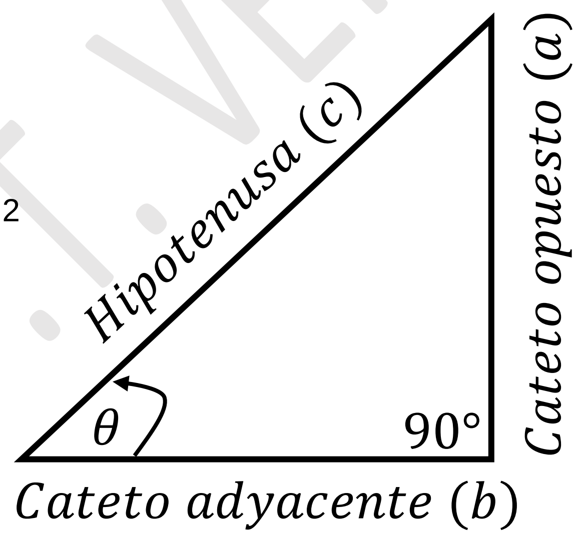
Las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera, se define como la división entre los tres lados de un triángulo rectángulo; O sea, de 90°. Se trata de establecer una comparación entre los catetos y la hipotenusa de dicho triangulo.

FIGURA 11.1



Existen tres razones trigonométricas; Coseno, seno y la tangente

FIGURA 11.2



1. El seno de un ángulo θ se define como la razón entre el cateto opuesto (***a***) y la hipotenusa (***c***)

$$\boldsymbol{seno\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{sen\ \theta = \frac{a}{c}}$$

2. El coseno de un ángulo θ se define como la razón entre el cateto adyacente (***b***) y la hipotenusa (***c***)

$$\boldsymbol{coseno\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{cos\ \theta = \frac{b}{c}}$$

3. La tangente de un ángulo θ se define como la razón entre el cateto opuesto (***a***) y el cateto adyacente (***b***)

$$\boldsymbol{tangente\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{tan\ \theta = \frac{a}{b}}$$

en consecuencia, cada una de estas funciones trigonométricas tienen otra razón inversa: la del seno es la cosecante, la del coseno es la secante y la de la tangente es la cotangente.

4. La cotangente de un ángulo θ se define como la razón entre el cateto adyacente (***b***) y el cateto opuesto (***a***)

$$\boldsymbol{cotangente\ \theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{cot\ \theta = \frac{b}{a}}$$

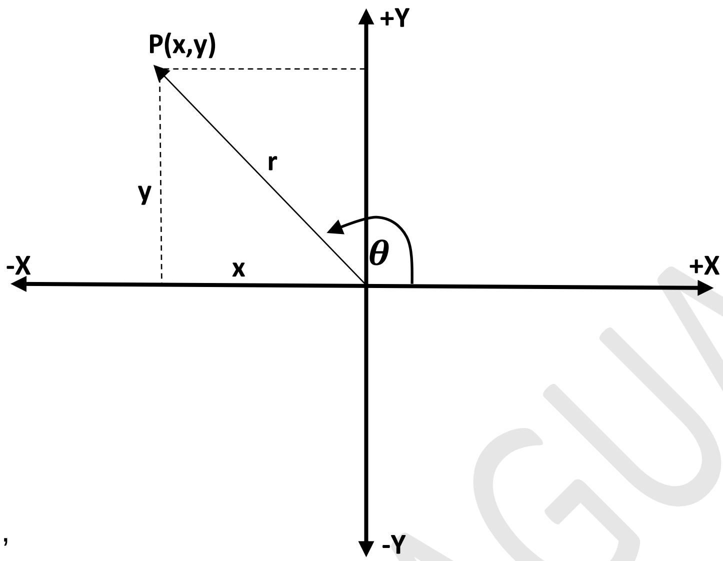
5. La secante de un ángulo θ se define como la razón entre la hipotenusa (***c***) y el cateto adyacente (***b***)

$$\boldsymbol{secante\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{sec\ \theta = \frac{c}{b}}$$

6. La cosecante de un ángulo θ se define como la razón entre la hipotenusa (***c***) y el cateto opuesto (***a***)

$$\boldsymbol{cosecante\ \theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}} \qquad \text{abreviado} \qquad \boldsymbol{csc\ \theta = \frac{c}{a}}$$

Dado un punto P y el ángulo en su posición normal, quedan definidas las seis funciones trigonométricas.



En resumen,

$\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{y}{r}}$	$\boldsymbol{cot\,\theta = \frac{x}{y}}$
$\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{x}{r}}$	$\boldsymbol{sec\,\theta = \frac{r}{x}}$
$\boldsymbol{tan\,\theta = \frac{y}{x}}$	$\boldsymbol{csc\,\theta = \frac{r}{y}}$

Observaciones:

a. Si se multiplica una razón trigonométrica por su inversa el resultado es 1.
b. Con dos valores conocidos se puede obtener el tercero aplicando el teorema de Pitágoras.

11.2. SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

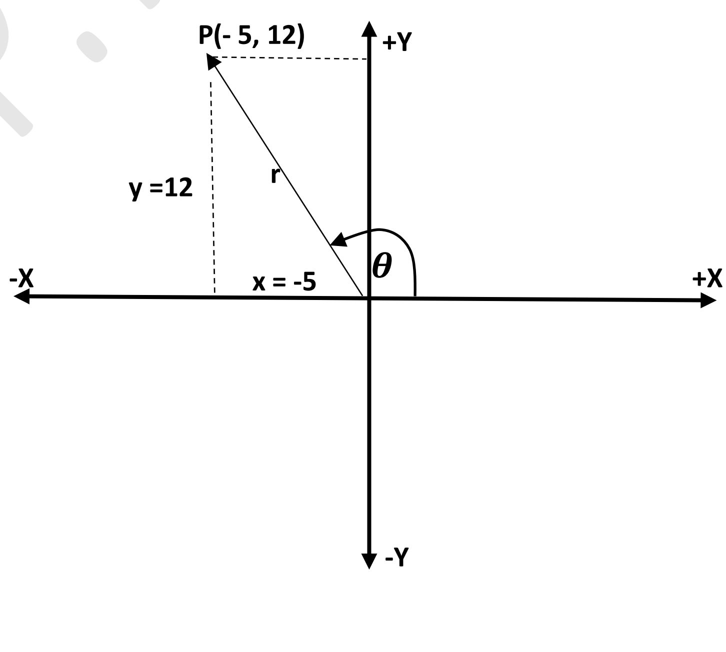
El signo de cada una de las funciones trigonométricas dependerá del cuadrante en que se encuentra el ángulo.

CUADRANTE / FUNCIONES	PRIMER Q_1	SEGUNDO Q_2	TERCERO Q_3	CUARTO Q_4
$sen\ \theta$	+	+	-	-
$cos\ \theta$	+	-	-	+
$tan\ \theta$	+	-	+	-
$cot\ \theta$	+	-	+	-
$sec\ \theta$	+	-	-	+
$csc\ \theta$	+	+	-	-

Ejemplos

1. Construya el ángulo en su posición normal y calcule las funciones trigonométricas, sabiendo que el punto P(- 5, 12) está en el lado terminal.

   Solución:



Definido el ángulo en su posición normal, se busca el valor de ***r***, aplicando en teorema de Pitágoras

x = - 5,   y = 12

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \pm\sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$

$r = \pm\sqrt{25 + 144}$

$r = \pm\sqrt{169}$

$r = \pm 13$

$\boldsymbol{r = 13}$, el radio vector siempre es positivo.

$$\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{12}{13}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}}$$

$$\boldsymbol{cot\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12}}$$

$$\boldsymbol{sec\,\theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}}$$

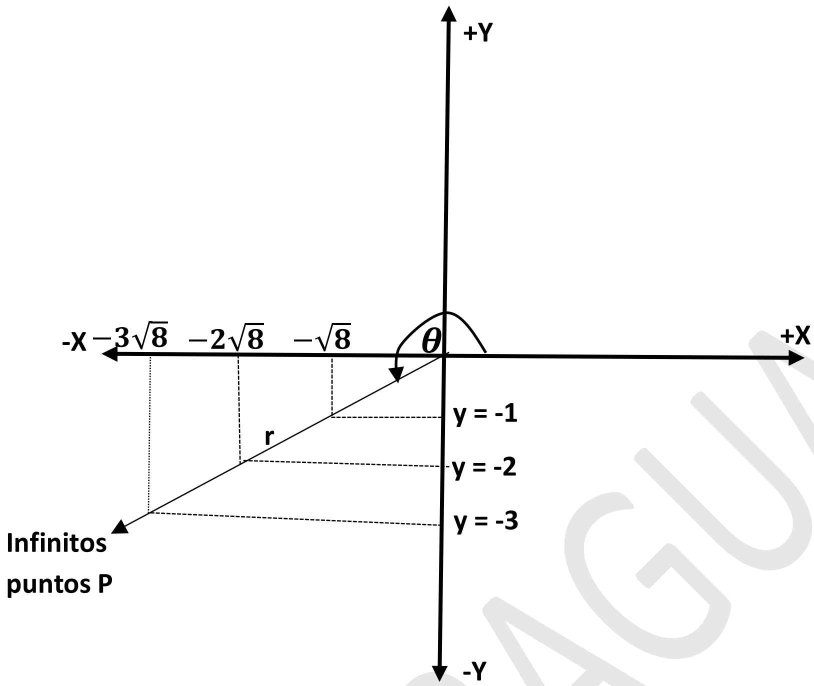
$$\boldsymbol{csc\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{12}}$$

2. Construya el ángulo en su posición normal sabiendo que la abscisa es $\sqrt{8}$ veces la ordenada y el radio vector está ubicado en el tercer cuadrante (Q_3). Halle las funciones trigonométricas.

   Solución:

   Supongamos que el valor de la ordenada es ***b***, luego

$\boldsymbol{x = -\sqrt{8}\,b}$ y $\boldsymbol{y = -b}$ ambas son negativas porque ***r*** está en Q_3



Definido el ángulo en su posición normal, se busca el valor de ***r***, aplicando en teorema de Pitágoras

$\boldsymbol{x = -\sqrt{8}\,b}$ y $\boldsymbol{y = -b}$

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \pm\sqrt{(-\sqrt{8}\,b)^2 + (-b)^2}$

$r = \pm\sqrt{8b^2 + b^2}$

$r = \pm\sqrt{9b^2}$

$r = \pm 3b$

$\boldsymbol{r = 3b}$

$$\boldsymbol{sen\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-b}{3b} = -\frac{1}{3}}$$

$$\boldsymbol{cot\,\theta = \frac{-\sqrt{8}\,b}{-b} = \sqrt{8}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{8}\,b}{3b} = -\frac{\sqrt{8}}{3}}$$

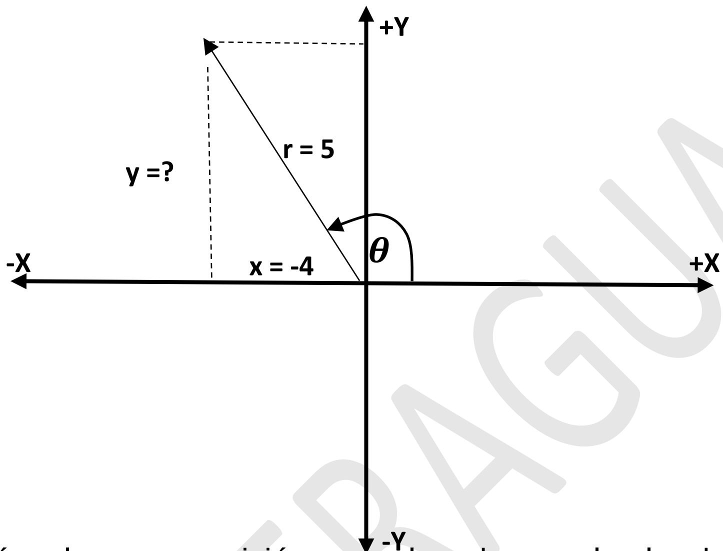
$$\boldsymbol{sec\,\theta = \frac{r}{x} = \frac{3b}{-\sqrt{8}\,b} = -\frac{3}{\sqrt{8}} = -\frac{3\sqrt{8}}{8}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{-b}{-\sqrt{8}\,b} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}}$$

$$\boldsymbol{csc\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{3b}{-b} = -3}$$

3. Construya el ángulo en su posición normal sabiendo que $\boldsymbol{\sec\theta} = -\frac{5}{4}$ $y\ \theta$ está en $Q_{2.}$ Encuentre los valores de las demás funciones trigonométricas

Solución: $\boldsymbol{\sec\theta} = -\frac{5}{4} = \frac{r}{x}$



Definido el ángulo en su posición normal, se busca el valor de ***y,*** aplicando en teorema de Pitágoras x = - 4, r = 5

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$

$y = \pm\sqrt{(5)^2 - (-4)^2}$

$y = \pm\sqrt{25 - 16}$

$y = \pm\sqrt{9}$

$y = \pm 3$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{3}$, porque θ está en $Q_{2.}$

Las demás funciones trigonométricas son:

$$\boldsymbol{sen\,\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$$

$$\boldsymbol{cos\,\theta} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{5}} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

$$\boldsymbol{tan\,\theta} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-4}} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$\boldsymbol{cot\,\theta} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} = \frac{\mathbf{-4}}{\mathbf{3}} = -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{csc\,\theta} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{y}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$$

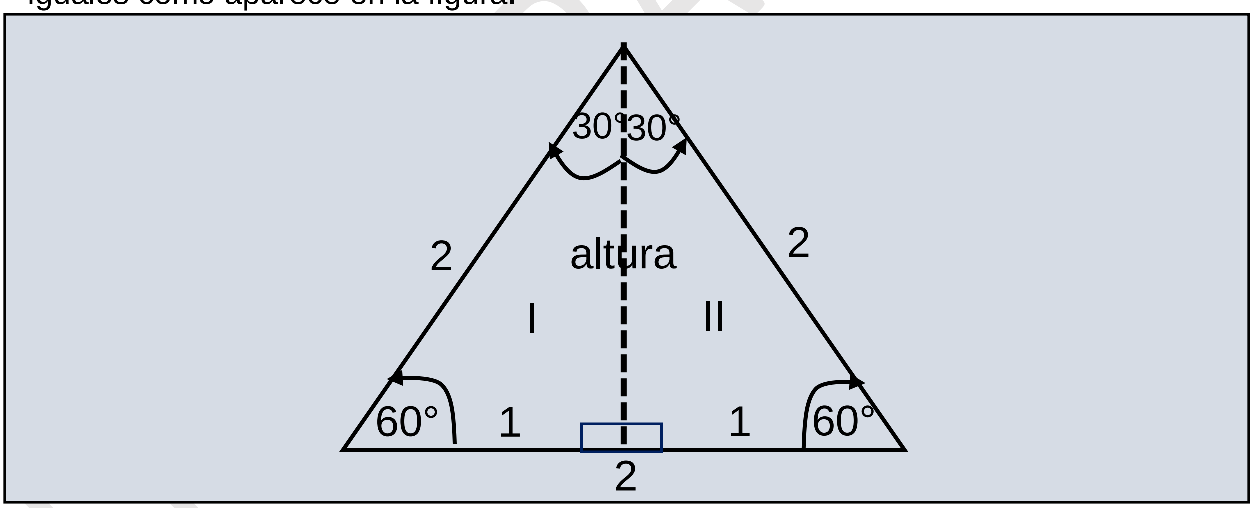
CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 11.1

Resuelva los siguientes ejercicios propuestos**. (LOS IMPARES)**

1. Sabiendo que P(-3, - 2) está en el lado terminal, construya el ángulo en su posición normal y halle todas las funciones trigonométricas.
2. Construya el ángulo en su posición normal y encuentre los valores de las funciones trigonométricas, tome en cuenta que P(12, -5) está en el lado terminal del ángulo.
3. Construya el ángulo en su posición normal y halle las demás funciones trigonométricas sabiendo que $\cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ y $\theta\ esta\ en\ Q_{4.}$
4. Halle los valores de las funciones $sec\theta,\ cos\theta$, sabiendo que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{5}$, 90°< $\theta < 180°$. Haga la gráfica.
5. Halle los valores de las funciones $tan\theta,\ sen\theta\ y\ cot\,\theta$, sabiendo que $\csc\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, 180°< $\theta < 270°$. Haga la gráfica.
6. Sabiendo que $\cos\theta = \frac{1}{4}$, encuentre los valores de las funciones trigonométricas $sec\theta,\ csc\theta\ y\ \tan\theta$. Grafique y tome en cuenta que $\theta\ esta\ en\ Q_{4.}$
7. Tomando en cuenta que el valor de la ordenada es el triple de la abscisa, construya el ángulo en su posición normal y encuentre los valores de las funciones trigonométricas. El lado terminal está en Q_3
8. Si la abscisa es la mitad del valor de la ordenada, encuentre los valores de las funciones trigonométricas y grafique. $\theta\ esta\ en\ Q_2$

11.3. VALORES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60° Y SUS MÚLTIPLOS

Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos de 30°, 45° y 60° partimos del hecho que en todo triangulo la suma de sus ángulos interiores da como resultado 180°, esta afirmación nos lleva a deducir que: Si se divide los grados entre 3 ángulos, el resultado es 60° equivalente a un triángulo llamado equilátero. Si se construye, por conveniencia, un triángulo equilátero con longitud 2 unidades en sus tres segmentos y trazamos la altura de dicho triángulo se forman 2 triángulos rectángulos semejantes. Por ser un triángulo equilátero, el segmento o altura, divide el segmento y al ángulo en dos partes iguales como aparece en la figura.



Como se forman 2 triángulos rectángulos semejantes, se puede hallar la longitud de lado faltante aplicando el teorema de Pitágoras. Es decir,

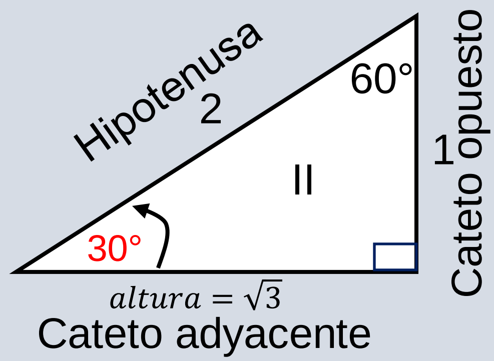
$$altura = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$$

$$altura = \sqrt{4 - 1}$$

$$altura = \sqrt{3}$$

11.3.1. ÁNGULO DE 30°

Si se gira el triángulo II, y se toma como referencia, en la base, el ángulo de 30°

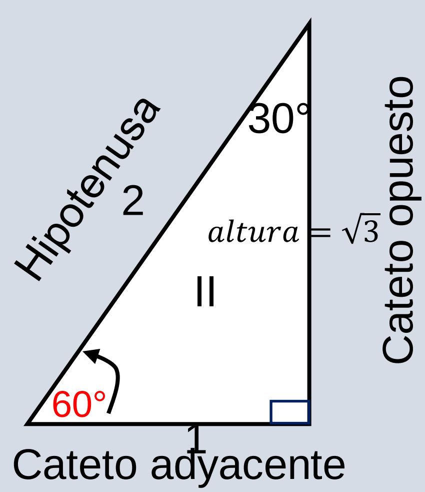


De lo anterior, se concluye que:

$\boldsymbol{sen\ 30° = \frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{cot\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}}$
$\boldsymbol{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$
$\boldsymbol{tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$	$\boldsymbol{csc\ 30° = \frac{2}{1} = 2}$

11.3.2. ÁNGULO DE 60°

Si se gira el triángulo II, y se toma como referencia, en la base, el ángulo de 60°

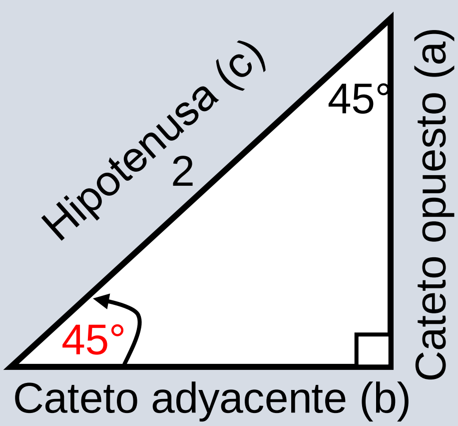


De lo anterior, se concluye que:

$\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$
$\boldsymbol{cos\ 60° = \frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{sec\ 60° = \frac{2}{1} = 2}$
$\boldsymbol{tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}}$	$\boldsymbol{csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

11.3.3. ÁNGULO DE 45°

Si se considera un triángulo isósceles rectángulo cuyo lado igual mide 2 unidades como se muestra en la figura



Como el triángulo es rectángulo isósceles, a = b, aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene que:

$c = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$ $\qquad 4 = 2a^2$

$2 = \sqrt{(a)^2 + (a)^2}$ $\qquad \frac{4}{2} = a^2$

$2 = \sqrt{2(a)^2}$ $\qquad 2 = a^2 \qquad a = \sqrt{2}$

Como a = b, porque es un triángulo rectángulo isósceles y el ángulo es de 45°, se tiene que $b = \sqrt{2}$

De lo anterior, se concluye que:

$\boldsymbol{sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{cot\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1}$
$\boldsymbol{cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{sec\ 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}}$
$\boldsymbol{tan\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1}$	$\boldsymbol{csc\ 45° = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}}$

Si se analiza los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° se puede concluir que:

Sen 30° = cos 60°

Cos 30° = sen 60°

Tan 30° = cot 60°

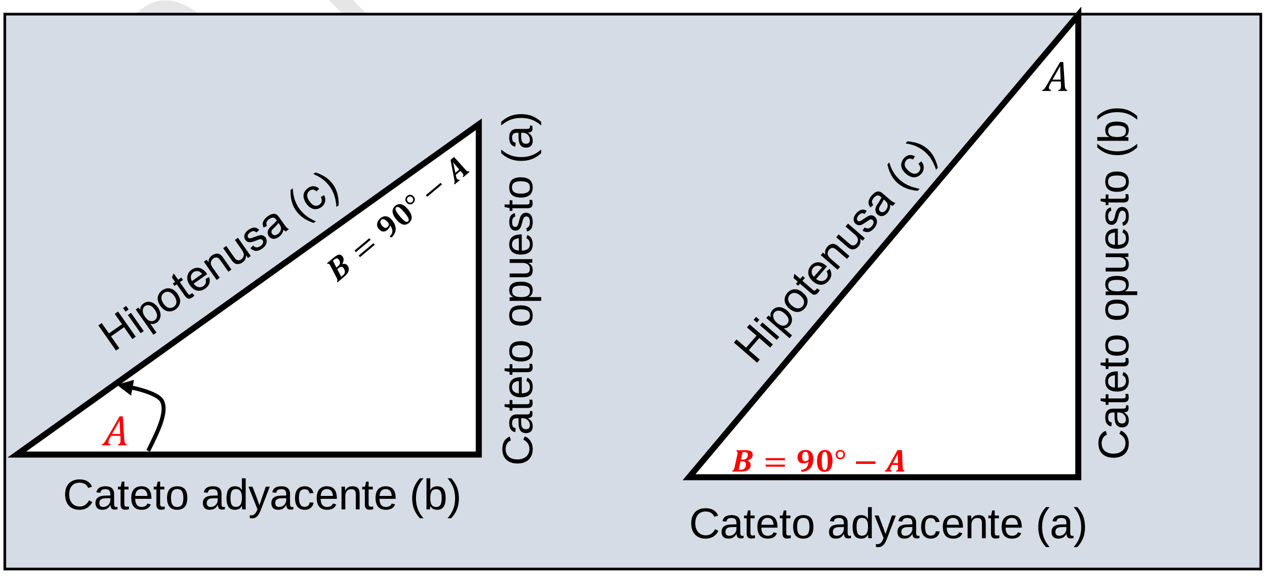
cot 30° = tan 60°

sec 30° = csc 60°

csc 30° = sec 60°

Esto sucede porque el ángulo de 30° y el ángulo de 60° son complementarios. O sea, 30° + 60° = 90°. Si dos funciones trigonométricas tienen ángulos complementarios, entonces ambas funciones se conocen con el nombre de cofunciones.

11.4. COFUNCIONES Y ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



En resumen,

COFUNCIONES

$$\text{Sen A} = \frac{a}{c} = \text{Cos B}$$

$$\text{Cos A} = \frac{b}{c} = \text{Sen B}$$

$$\text{Tan A} = \frac{a}{b} = \text{cot B}$$

$$\text{Cot A} = \frac{b}{a} = \text{tan B}$$

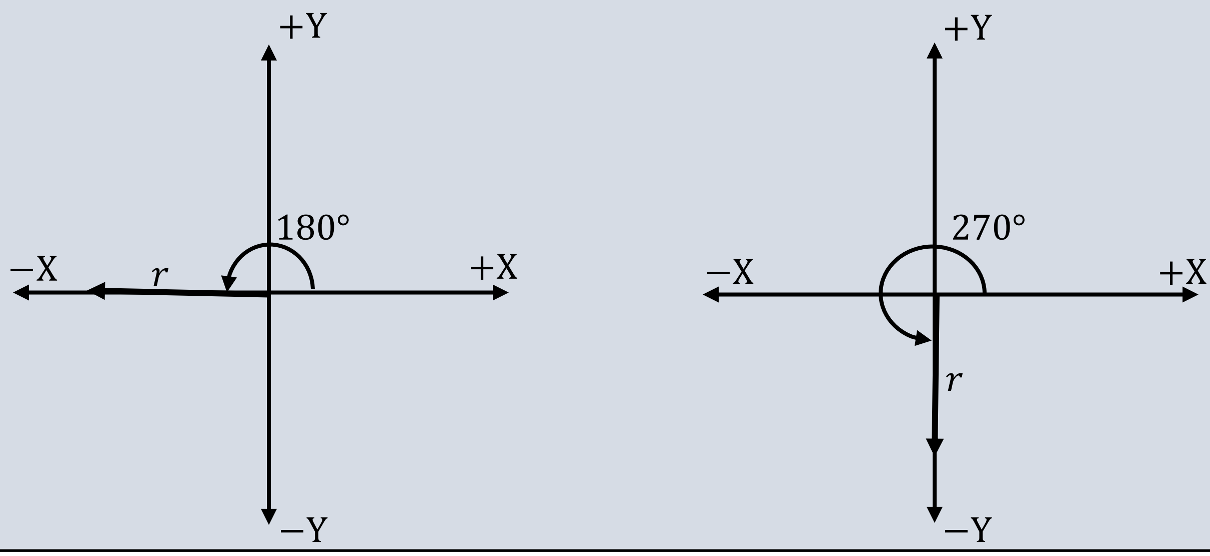
$$\text{Sec A} = \frac{c}{b} = \text{Csc B}$$

$$\text{Csc A} = \frac{c}{a} = \text{Sec B}$$

11.5 FUNCIONES DE ÁNGULOS CUADRANTES O CUADRANTALES

Los ángulos cuadrantes son aquellos que construidos en su posición normal su lado terminal coincide con uno de los semiejes en el plano cartesiano. Estos ángulos son: 90°, 180°, 270°, 360° y sus múltiplos.

Consideremos los ángulos de 180° y 270°



Tomando en cuenta que el radio o lado terminal coincide con uno de los ejes, quedan definidas las 6 funciones trigonométricas de la siguiente manera:

Sen 180° $= \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$

Cos 180° $= \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

Tan 180° $= \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$

Cot 180° $= \frac{x}{y} = \frac{-r}{0} = ind.$

Sec 180° $= \frac{r}{x} = \frac{r}{-r} = -1$

Csc 180° $= \frac{r}{y} = \frac{r}{0} = ind.$

Sen 270° $= \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1$

Cos 270° $= \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$

Tan 270° $= \frac{y}{x} = \frac{-r}{0} = ind.$

Cot 270° $= \frac{x}{y} = \frac{0}{-r} = 0$

Sec 270° $= \frac{r}{x} = \frac{r}{0} = ind.$

Csc 270° $= \frac{r}{y} = \frac{r}{-r} = -1$

Indefinido = ind.

En resumen, los valores de las funciones trigonométricas para ángulos cuadrantes quedan definidas como se muestra en la siguiente tabla:

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS CUADRANTES				
grados	**90°**	**180°**	**270°**	**0° o 360°**
radianes	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\theta}$	1	0	-1	0
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$	0	-1	0	1
$\mathbf{tan}\,\boldsymbol{\theta}$	Ind.	0	Ind.	0
$\mathbf{cot}\,\boldsymbol{\theta}$	0	Ind.	0	Ind.
$\mathbf{sec}\,\boldsymbol{\theta}$	Ind.	-1	Ind	1
$\mathbf{csc}\,\boldsymbol{\theta}$	1	Ind.	-1	Ind.

11.6 SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS MULTIPLOS DE 30°, 45° Y 60°.

Los múltiplos de los ángulos de 30°, 45° y 60° son aquellos que se forman de la suma o resta con los ángulos cuadrantes de 180° y 360° con estos ángulos.

Por ejemplo:

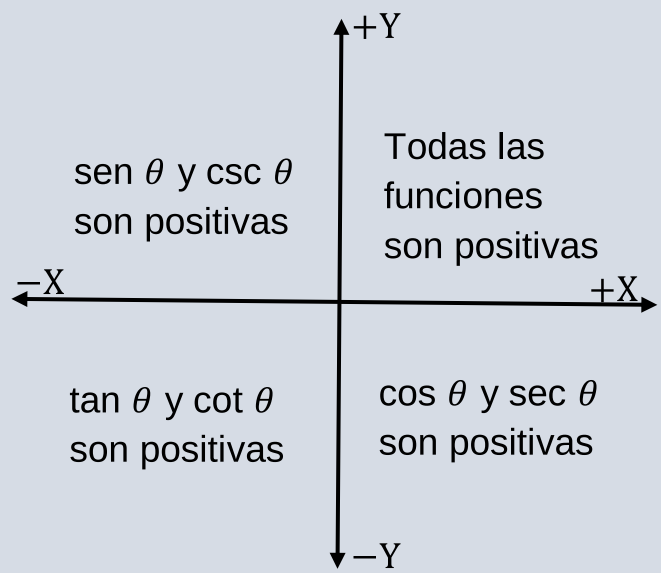
360° - 30° = 330° es múltiplo de 30°

180° +45° = 225° es múltiplo de 45°

180° - 60° = 120° es múltiplo de 60°

El ángulo múltiplo va a depender de su ángulo relacionado o de referencia. Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas, dependerá del cuadrante en que está ubicado el ángulo y de la función trigonométrica. El valor de estos ángulos solo difiere en el signo de su relacionado.

Signo de cada una de las funciones trigonométricas

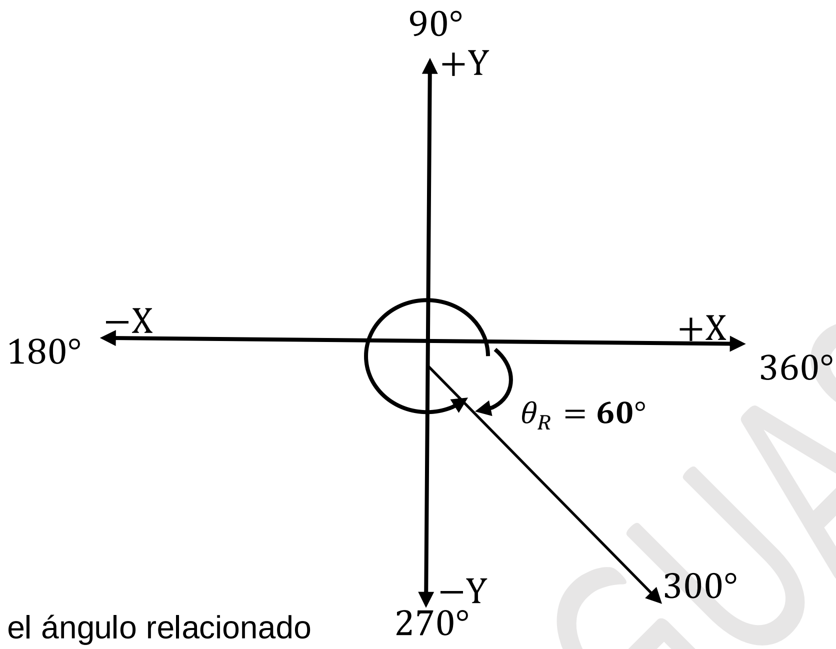


En cada cuadrante, las demás funciones trigonométricas tendrán signo negativo.

Ejemplo:

Halle el ángulo relacionado y signo de csc 300°. Encuentre el valor csc 300°

Solución



Se busca el ángulo relacionado

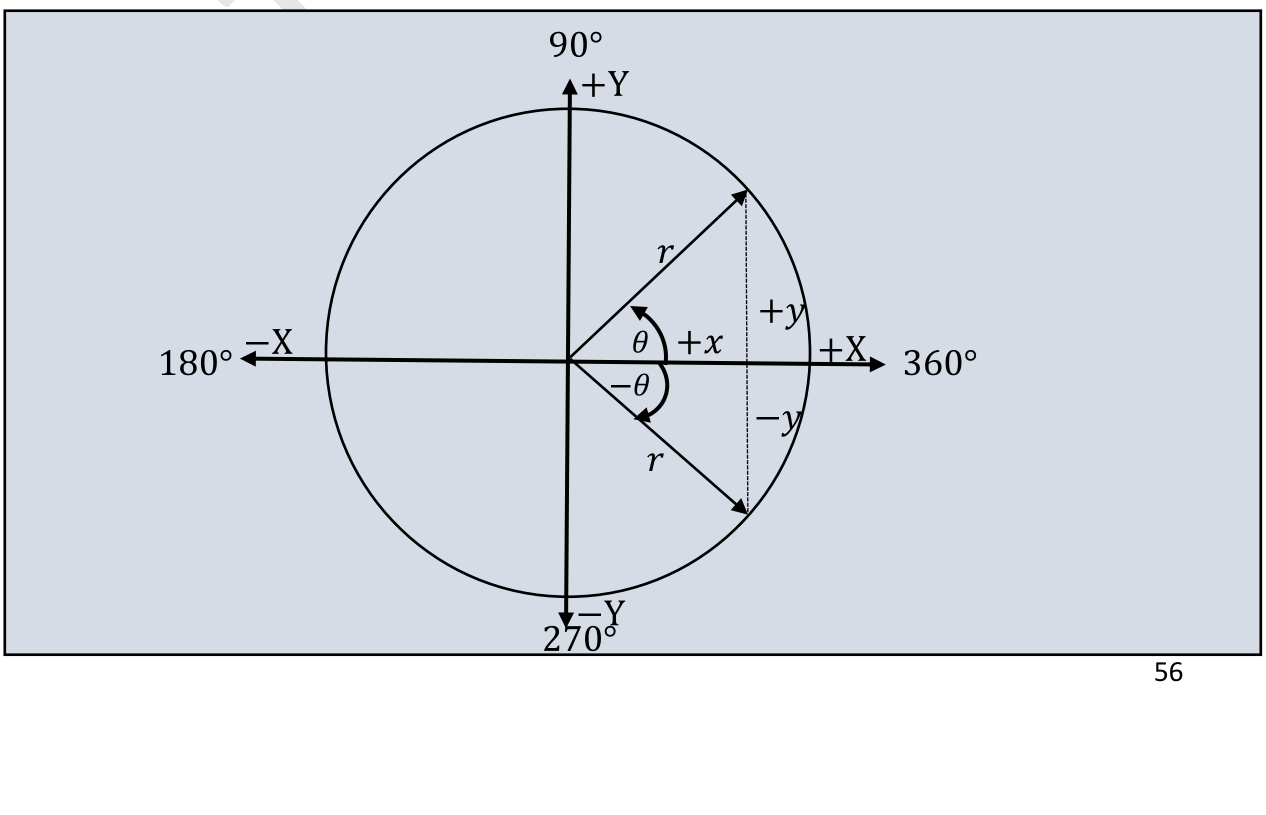
$\theta_R = 360° - 300° = \mathbf{60°}$ **porque el ángulo está en Q_4**

La cosecante en el cuarto cuadrante tiene signo negativo.

Luego, csc 300° = - csc 60° = **-** $\mathbf{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

11.7. ÁNGULO NEGATIVO PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

El ángulo negativo que gira en sentido a las manecillas del reloj, varía en el signo en algunas funciones trigonométricas. Observe la figura.



Se deduce que:

$$\text{sen }(-\theta) \ = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\text{ sen } \theta$$

$$\cos\ (-\theta) \ = \frac{x}{r} = \cos \theta$$

$$\tan\ (-\theta) \ = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

$$\cot\ (-\theta) \ = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot \theta$$

$$\sec\ (-\theta) = \frac{r}{x} = \sec \theta$$

$$\csc\ (-\theta) \ = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\csc \theta$$

Ejemplos:

Halle el valor numérico de las siguientes expresiones.

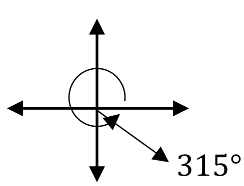
$\boldsymbol{sen\ 45° + 2\cos 60°}$

Solución:

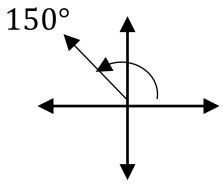
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)$	Se sustituyen los valores de funciones trigonométricas para cada ángulo.
$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	Se simplifica.
$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$	se busca el m.c.m. y se simplifica.

$\boldsymbol{2\tan 315° cos 60° + tan\ 60° \cos 150° - sen 90°}$

Solución:



$\theta_R = 360° - 315° = \mathbf{45°}$ **porque el ángulo está en $\boldsymbol{Q_4}$ y la tan $\boldsymbol{\theta}$ es negativa.**



$\theta_R = 180° - 150° = \mathbf{30°}$ **porque el ángulo está en $\mathbf{2}$ y el cos $\boldsymbol{\theta}$ es negativo.**

Luego,

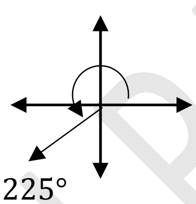
$= 2(-1)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\sqrt{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1$ Se sustituyen los valores de funciones trigonométricas para cada ángulo.

$= -1 - \frac{3}{2} - 1$ Se simplifica el 2 y $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

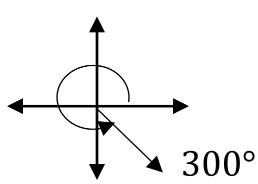
$= -\mathbf{\frac{7}{2}}$ se busca el m.c.m. y se simplifica.

$$\sqrt{\frac{\mathbf{tan\,225°} + \boldsymbol{cos}\,\mathbf{300°}}{\mathbf{csc\,150°} + \boldsymbol{sec}\,\mathbf{360°}}}$$

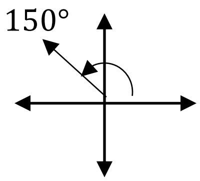
Solución:



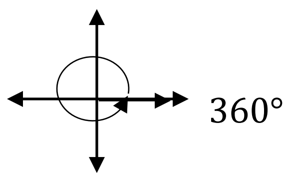
$\theta_R = 225° - 180°° = \mathbf{45°}$ **porque el ángulo está en $\boldsymbol{Q_3}$ y la tan $\boldsymbol{\theta}$ es positiva.**



$\theta_R = 360° - 300° = \mathbf{60°}$ **porque el ángulo está en $\boldsymbol{Q_4}$ y el cos $\boldsymbol{\theta}$ es positivo.**



$\theta_R = 180° - 150° = \mathbf{30°}$ **porque el ángulo está en Q_2 y la csc θ es positiva.**



Es un ángulo cuadrante y el valor de la sec 360° = 1

Luego,

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{2} + \mathbf{1}}}$$

Se sustituyen los valores de funciones trigonométricas para cada ángulo.

$$= \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{3}}$$

Se resuelven las operaciones

$$= \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}}$$

Se divide, invirtiendo el divisor

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

Se racionaliza

$$\frac{\boldsymbol{\sec(-225°)[\cos 30° + sen(-300°)]}}{\boldsymbol{\cos(-210°) - sen(-240°)}}$$

Solución:

Función	Ángulo negativo	Cuadrante	Signo del ángulo	Ángulo de referencia	Valor final
$\sec(-225°)$	$\sec 225°$	tercero	$-$	$-\sec 45°$	$-\sqrt{2}$
$\text{sen}(-300°)$	$-\text{sen}\,300°$	cuarto	$-$	$\text{sen}\ 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(-210°)$	$\cos 210°$	tercero	$-$	$-\cos\ 30°$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{sen}(-240°)$	$-\text{sen}\,240°$	tercero	$-$	$\text{sen}\ 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego,

$$= \frac{-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$ Se sustituyen los valores de funciones trigonométricas para cada ángulo.

$$= \frac{-\sqrt{2}\,(\sqrt{3})}{-\sqrt{3}}$$ Se resuelven las operaciones.

$$= \sqrt{\mathbf{2}}$$ Se simplifica.

Demostraciones utilizando ángulos notables

Ejemplos:

$$\boldsymbol{2\, sen\, 30° \cos 30° = sen\, 60°}$$

Solución

$2\, sen\, 30° \cos 30°$	$=$	$sen\, 60°$	
$2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Sustituyendo los valores de las razones trigonométricas.
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$=$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	Se simplifica.

$$\frac{\tan 60° - \tan 30°}{\cos 240°} = sen\ 30° \tan 30° - \cos 30°$$

$$\frac{\tan 60° - \tan 30°}{\sec 240°} = sen\ 30° \tan 30° - \cos 30°$$

$$\frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo los valores de las razones trigonométricas.

$$\frac{\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se simplifica.

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{-2} = -\frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Se simplifica

$$\tan 240°\ csc\ 60° = \cos 330° tan 60° + sen 45° \cos 315°$$

$$tan 240° \csc 60° = \cos 330° tan 60° + sen 45° \cos 315°$$

$$(\sqrt{3})\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Sustituyendo los valores de las razones trigonométricas.

$$\frac{2.(3)}{3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4}$$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ y
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$$2 = \frac{6+2}{4}$$

Se busca el m.c.m.

$$2 = \frac{8}{4}$$

$$2 = 2$$

Se simplifica

$$\mathbf{cot(-210°) + csc(-135°) = \frac{1}{sec(-315°) - tan(-300)}}$$

$\cot(-210°) + \csc(-135°)$	$=$	$\frac{1}{\sec(-315°) - \tan(-300)}$	
$-\cot(210°) - \csc(135°)$	$=$	$\frac{1}{\sec(315°) + \tan(300)}$	Por definición de ángulo negativo
$-(\sqrt{3}) - (\sqrt{2})$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2} + (-\sqrt{3})}$	Sustituyendo los valores de las razones trigonométricas.
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$	Racionalizando
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$=$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$	Aplicando la regla
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$=$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3}$	Desarrollando las potencias
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$=$	$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1}$	Restando en el denominador
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$		$-\sqrt{2} - \sqrt{3}$	Dividiendo cada numerador entre -1
$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$		$-\sqrt{3} - \sqrt{2}$	Propiedad conmutativa

$$\boldsymbol{5sen^2(-270) + 2sec^2(-135°) = \frac{cot\ 210°}{cot\ (-300)} - \frac{sec\ (-120°) tan\ 60°}{tan\ (-150°)}}$$

$5sen^2(-270) + 2sec^2(-135°)$	$=$	$\frac{cot\ 210°}{cot\ (-300)} - \frac{sec\ (-120°) tan\ 60°}{tan\ (-150°)}$
$5(-sen\ 270°)^2 + 2(\sec 135°)^2$	$=$	$\frac{cot\ 210°}{-cot\ (300)} - \frac{sec\ (120°) tan\ 60°}{-tan\ (150°)}$

$$5[-(-1)]^2 + 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} - \frac{(-2)(\sqrt{3}}{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

$$5(1)^2 + 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{(-2)(\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$5(1) + 2(2) \quad = \quad \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$5 + 4 \quad = \quad \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$9 \quad = \quad 3\sqrt{3} \times \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$9 \quad = \quad 9$$

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 11.2

I parte. Halle el valor de las siguientes expresiones. **LOS IMPARES**

1. $sen\ 60° + \tan 30°$
2. $\frac{\cos 45° + sen\ 45°}{\sec 45°}$
3. $\csc 90° - 3\cot 60°$
4. $\frac{\tan 120° + \cot 30°}{csc^2\ 135°}$
5. $2\ sen^3\ 120° + 4\ cos^2 225° + \tan 60°$
6. $\sqrt{\frac{cos^2\ \ 45° + cos^2\ 210°}{\csc 150° + tan^2\ 240°}}$
7. $cos^2(-360) + \cos(-180) + sen(-270)$
8. $\sqrt{\frac{\sec(-300) - sen\ (-90°)}{\csc(-270°) - \csc(-30°)}}$

II Parte: Demuestre las siguientes igualdades utilizando los valores de los ángulos notables. **SÓLO LOS IMPARES**

1. $sen\ 45° + \cos 45° = \sec 45°$
2. $\cos 30° \sec 60° = \cot 30°$
3. $sen\ 90° + \csc 30° = \ tan^2\ 60°$
4. $2\cos 45° + 4\ sen\ 30° = \sec 45° + tan^2\ 60° - sen\ 90°$
5. $4\cos 30° + 6\ sen\ 45° = 6\tan 30° + 3\sec 45°$
6. $\frac{sen\ 90°+\cos 60°}{\sec 60°} = cos^2\ 60° + \ sen^2 45$
7. $csc^2\ 30° + tan^2 45° = \frac{\csc 30°+sen\ 30°}{cos^2\ 60°+\ sen^2\ 30°}$
8. $\frac{\tan 240°}{\cot 30°} + \frac{\csc 150°}{\sec 60°} = \sec 60°$
9. $\cos 135° + sen\ 150° = \frac{1}{\sec 120°+2\sec 135°}$
10. $\cos 30° = \sqrt{\frac{\tan 45°+sen\ 30°}{csc^2\ 45°}}$
11. $\cos 300° \cos 60° + \cot 330° \tan 60° = \cos 180° - \tan 225° - sen\ 120° \cos 30°$
12. $2\ sec^2\ 45° - 5\ tan^2\ 45° = \cos(-180)$
13. $3\ sec^3\ (-315°) - 2\ cot^2\ 150° = 6(\csc 45° + \cot 135°)$
14. $\frac{sen\ 90°-\cot 150°}{3\cot 30° \tan 60°} = \frac{\cos(-60°)+\cos 30°}{csc^2\ 30°+\ sen^2\ 45}$
15. $4(cos 330° - \cot 210\ °)^2 = \frac{3\cot 30°\ \csc(-300°)}{\sec(-60°)}$

Unidad

14

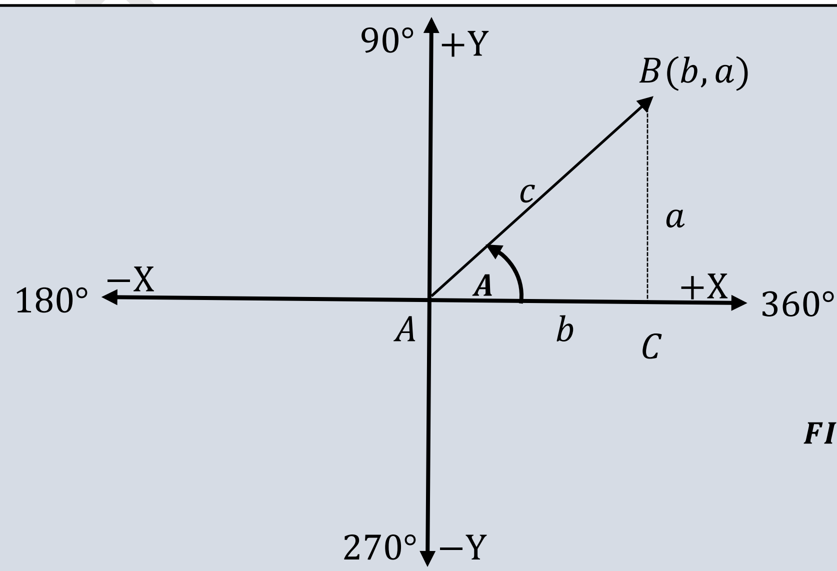
Encuentra los valores desconocidos de los lados y ángulos de triángulos rectángulos.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

El teorema de Pitágoras fue descubierto aproximadamente hacia el año 500 a.c. y su nombre se atribuye a la escuela pitagórica. Este teorema que utiliza triángulos rectángulos establece que la suma de la longitud de los cuadrados de los dos lados que forman el ángulo recto es exactamente igual a la longitud del cuadrado del tercer lado o lado mayor. Diversos estudios afirman que este teorema ya era conocido y aplicado por los antiguos babilonios; también, por la antigua civilización hindú y algunas culturas chinas. A pesar que en otras civilizaciones ya se conocía el Teorema de Pitágoras y además lo usaban para ciertos trabajos prácticos no se le puede quitar el mérito a Pitágoras ya que fue él quien demostró tal resultado para todos los triángulos rectángulos. Gracias a este resultado se puede dar respuesta a las medidas de los triángulos rectángulos.

14.1. RESOLUCIÓN DE TRÁNGULOS RECTÁNGULOS

Si se construye un triángulo rectángulo $\Delta \boldsymbol{ABC}$ con el ángulo $\boldsymbol{A}$ en su posición normal, entonces, las coordenadas del vértice ***B*** son (b, a) y el radio vector ***C***. como se muestra en la figura 14.1



$\boldsymbol{FIGURA\ 14.1}$

Por lo tanto, quedan definidas las funciones trigonométricas para el ángulo ***A***:

$$\boldsymbol{sen\ A = \frac{a}{c}} \qquad \boldsymbol{cot\ A = \frac{b}{a}}$$

$$\boldsymbol{cos\ A = \frac{b}{c}} \qquad \boldsymbol{sec\ A = \frac{c}{b}}$$

$$\boldsymbol{tan\ A = \frac{a}{b}} \qquad \boldsymbol{csc\ A = \frac{c}{a}}$$

Si tomamos en cuenta el ángulo complementario del ángulo ***A***, obtenemos la cofunción de ese ángulo llamado ***B.*** como se muestra en la figura

muestra en la figura 14.2

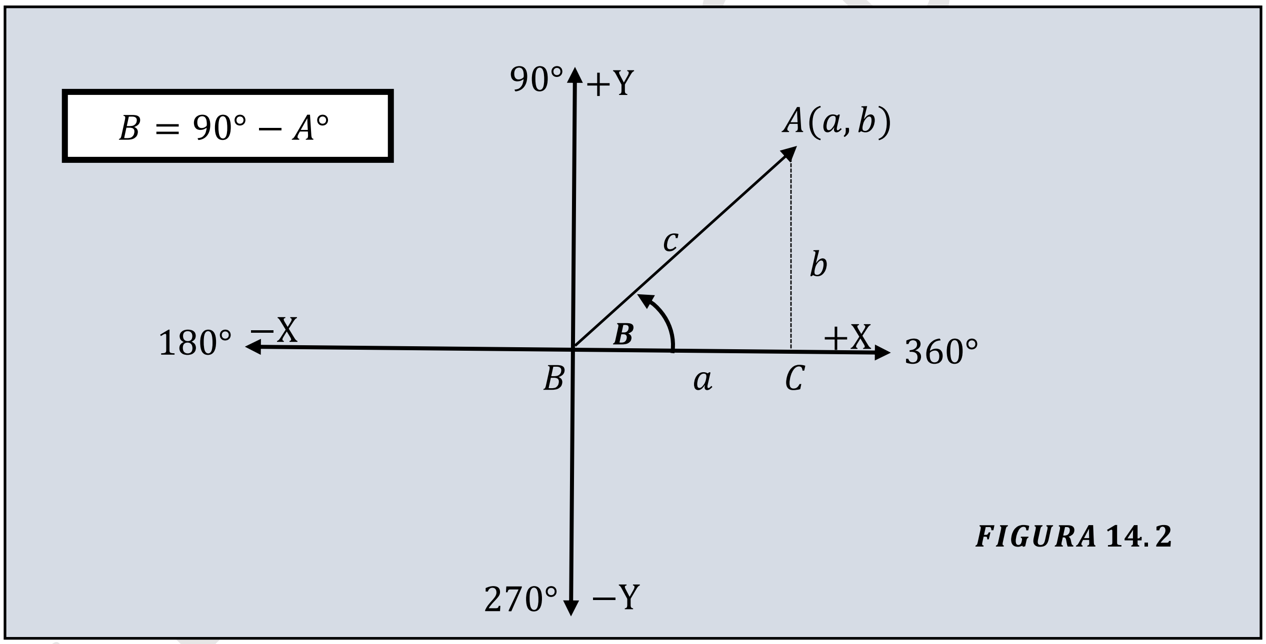


***FIGURA* 14.2**

De lo anterior, quedan definidas las funciones trigonométricas para el ángulo ***B:***

$$\boldsymbol{sen\ B = \frac{b}{c}} \qquad \boldsymbol{cot\ B = \frac{a}{b}}$$

$$\boldsymbol{cos\ B = \frac{a}{c}} \qquad \boldsymbol{sec\ B = \frac{c}{a}}$$

$$\boldsymbol{tan\ B = \frac{b}{a}} \qquad \boldsymbol{csc\ B = \frac{c}{b}}$$

Si se compara los resultados de las funciones trigonométricas para los ángulos ***A*** y ***B*,** se tiene que:

$$sen\ A = \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos A \ = \operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$$

$$\tan A \ = \cot B = \frac{a}{b}$$

$$cot\ A = \tan B = \frac{b}{a}$$

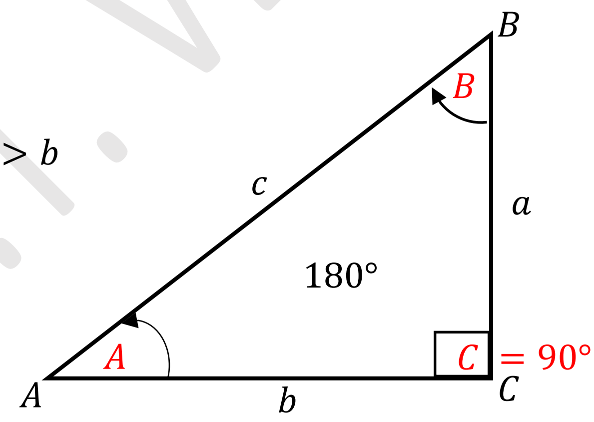
$$sec\ A = \csc B = \frac{c}{b}$$

$$csc\ A = \sec B = \frac{c}{a}$$

Resolver un triángulo rectángulo es conocer la longitud de cada uno de los lados del triángulo y la medida de los dos ángulos restantes de dicho triángulo. Los lados de un triángulo rectángulo se representan por letras minúsculas (a,b,y c) y los ángulos por letras mayúsculas (A, B y C). Es importante recordar que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°. Es decir,

A +B + C = 180

$$c > a \ \ y \ \ c > b$$



Por ser triángulos rectángulos, hay un ángulo de 90°. Sea ***C*** el ángulo recto, o sea, **C = 90°**

Luego,

A +B + 90° = 180°

Si se despeja ***A*,**

$$A = 180° - 90° - B$$

$$\mathbf{A = 90° - B}$$

Si se despeja B

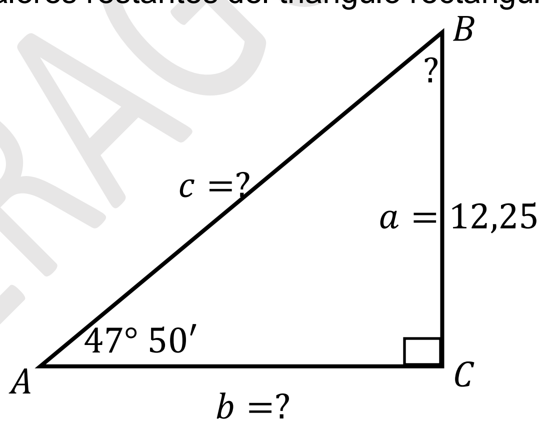
$$B = 180° - 90° - A$$

$$\mathbf{B = 90° - A}$$

En general, en la resolución de triángulos rectángulos siempre se tiene tres datos conocidos y tres desconocidos.

Ejemplo 1

Si A = 47° 50’, a = 14, 25, Halle los valores restantes del triángulo rectángulo



Solución:

B = 90° - A

B = 90° - 47° 50’

B = 89° 60’ – 47° 50’

B = 42° 10’

Para encontrar el valor de b, se usa:

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan 47°\ 50' = \frac{12,25}{b}$$

$$1,1041 = \frac{12,25}{b}$$

Despejando b,

$$\mathrm{b} = \frac{12{,}25}{1{,}1041} \qquad \mathbf{b = 11,09}$$

Para encontrar el valor de c, se usa:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{sen} 47°\ 50' = \frac{12,25}{c}$$

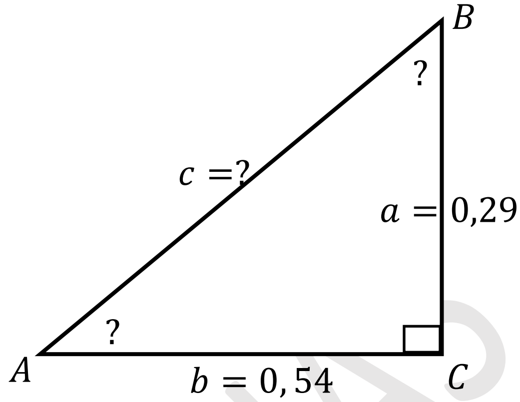
$$0,7412 = \frac{12,25}{c}$$

Despejando c,

$$\mathrm{c} = \frac{12{,}25}{0{,}7412} \qquad \mathbf{c = 16,53}$$

Ejemplo 2

Si a = 0, 29, c = 0,54, Halle los valores restantes del triángulo rectángulo



Solución:

Para encontrar el valor de A, se usa:

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\tan A = \frac{0,29}{0,54}$$

$$\tan \mathrm{A} = 0,5370$$

Despejando A,

$$\mathrm{A} = tan^{-1}(0,5370)$$

$$\mathbf{A = 28° \ 14'}$$

En la calculadora, (Shift tan 0,5370 = ° ' '')

B = 90° - A

B = 90° - 28° 14'

B = 89° 60' – 28° 14'

B = 61° 46'

Para encontrar el valor de c, se usa:

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\cos 28° \ 14' = \frac{0,54}{c}$$

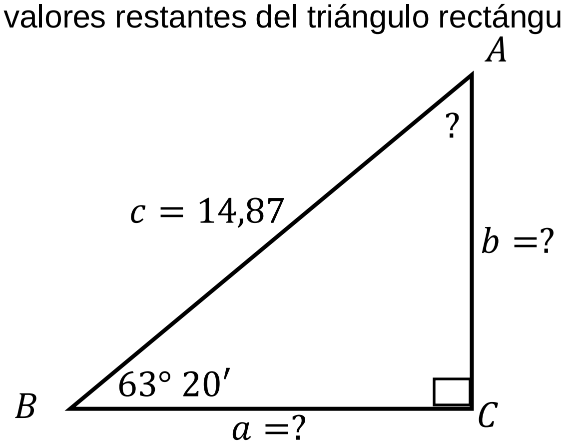
$$0,8810 = \frac{0,54}{c}$$

Despejando c,

$$\mathrm{c} = \frac{0,54}{0.8810} \qquad \mathbf{c = 0,61}$$

Ejemplo 3

Si B = 63° 20', c = 14, 87, Halle los valores restantes del triángulo rectángulo



Solución:

A = 90° - B

A = 90° - 63° 20'

A = 89° 60' – 63° 20'

A = 26° 40'

Para encontrar el valor de *a*, se usa:

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos 63°20' = \frac{a}{14{,}87}$$

$$0{,}4488 = \frac{a}{14{,}87}$$

Despejando el *a*,

$$a = (14{,}87)(0{,}4488)$$

$$\boldsymbol{a = 6{,}67}$$

Para encontrar el valor de b, se usa:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{sen} 63°\ 20' = \frac{b}{14{,}87}$$

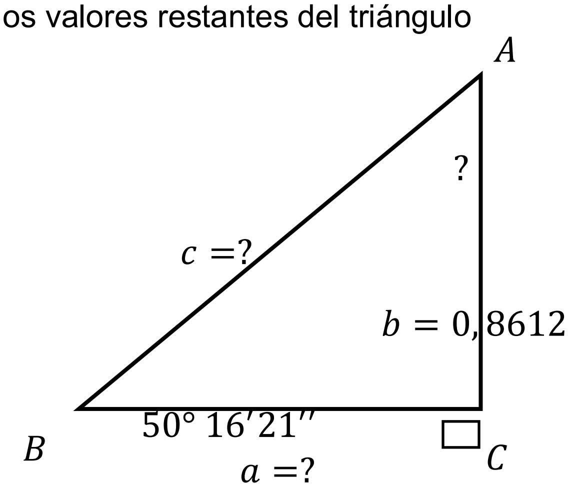
$$0{,}8936 = \frac{b}{14{,}87}$$

Despejando b,

$\mathrm{b} = (0{,}8936)(14{,}87)$ $\quad$ $\boldsymbol{b = 13{,}29}$

Ejemplo 4

Si B = 50° 16’ 21’’, b = 0, 8612, Halle los valores restantes del triángulo rectángulo.



Solución:

A = 90° - B

A = 90° - 50° 16’ 21’’

A = 89° 60’ – 50° 16’ 21’’

A = 39° 43’ 39’’

Para encontrar el valor de *a*, se usa:

$\tan B = \frac{b}{a}$

$\tan 50°16'21'' = \frac{0{,}8612}{a}$

$1{,}2033 = \frac{0{,}8612}{a}$

$a = \frac{0{,}8612}{1{,}2033}$ $\quad a = 0{,}7157$

Para encontrar el valor de c, se usa:

$\text{sen}\, B = \frac{b}{c}$

$\text{sen}\, 50°\, 16'21'' = \frac{0{,}8612}{c}$

$0{,}7691 = \frac{0{,}8612}{c}$

$c = \frac{0{,}8612}{0{,}7691}$ $\quad c = 1{,}1197$

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 14.1

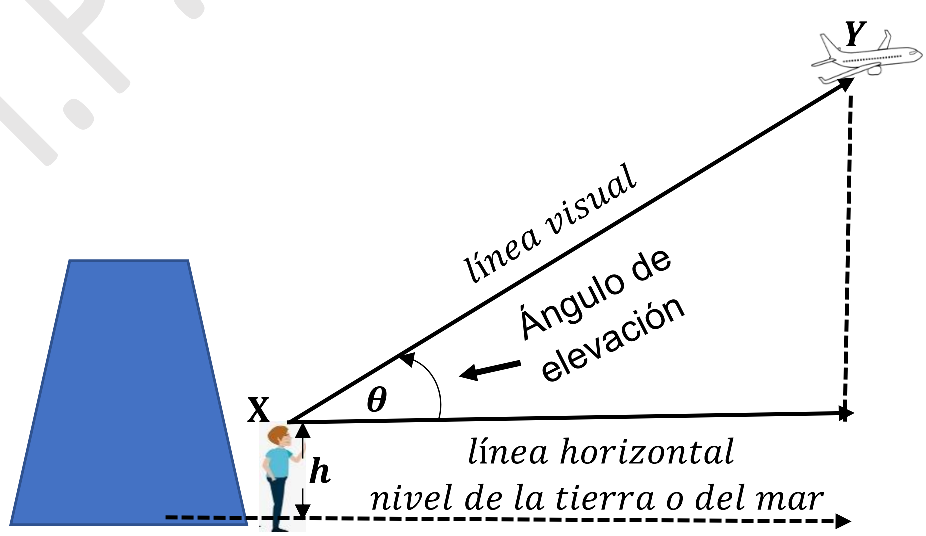
Encuentre la medida de los lados y ángulos desconocidos de un triángulo rectángulo. **LOS IMPARES**

1. a = 12, b = 5
2. a = 16, c = $16\sqrt{2}$
3. c = 8, A = 60°
4. b = $6\sqrt{3}$, A = 30°
5. a = 47; B = 22°
6. b = 20,45; B = 15° 57’
7. a = 4,56; b = 2,71
8. b = 24,23; c = 55,58
9. b = 75,6; A = 53° 3’
10. a = 7, B = 25° 12’ 42’’
11. a = $\sqrt{2}$, b = $\sqrt{7}$
12. b = 8,73; B = 15° 20’ 13’’
13. a = 0, 4512; b = 0,2315
14. a = 0,4513; B = 86° 56’24’’

14.2. ANGULO DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

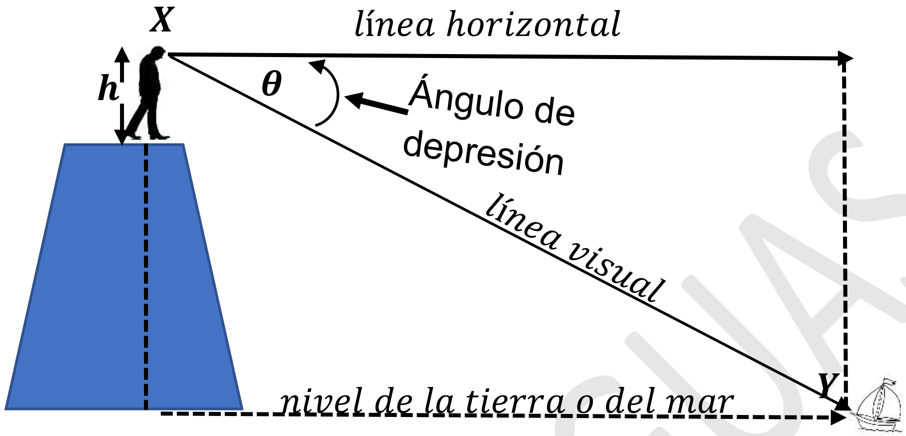
14.2.1. Ángulo de elevación

Si un observador está en un punto X, mira un objeto, hacia arriba, situado en un punto Y, el rayo $\overrightarrow{XY}$ se denomina línea visual o de mira y el ángulo que se forma con la línea horizontal, paralela al nivel del suelo, se llama ángulo de elevación.



14.2.2. Ángulo de depresión

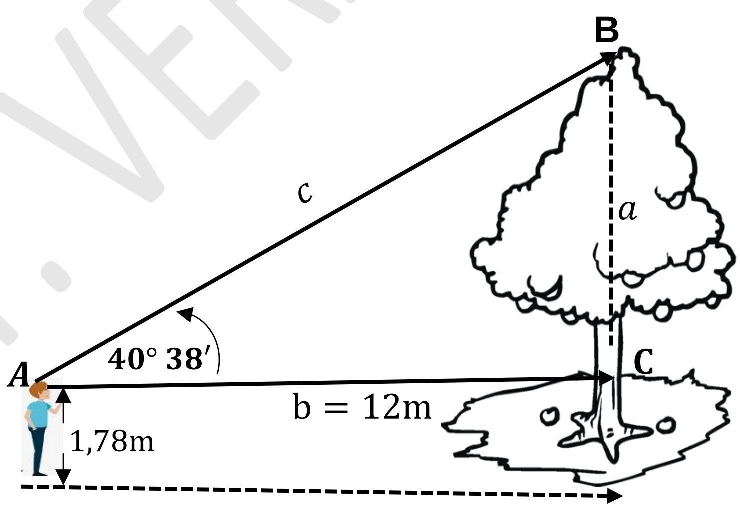
Si un observador está en un punto X, mira un objeto, hacia abajo, situado en un punto Y, el rayo $\overrightarrow{XY}$ se denomina línea visual o de mira y el ángulo que se forma con la línea horizontal, paralela al nivel del suelo, se llama ángulo de depresión.



Ejemplos

1. Se desea saber la altura de un árbol, cuyo ángulo de elevación es medido por una persona de 1,78 m de altura en dirección 40° 38’ y la distancia entre la persona y el árbol es de 12 m.

Solución:



$\tan A = \frac{a}{b}$

$\tan 40° \ 38' = \frac{a}{12m}$

$0,8581 = \frac{a}{12m}$

$a = (12m)(0,8581) \quad \boldsymbol{a = 10,3\ m}$

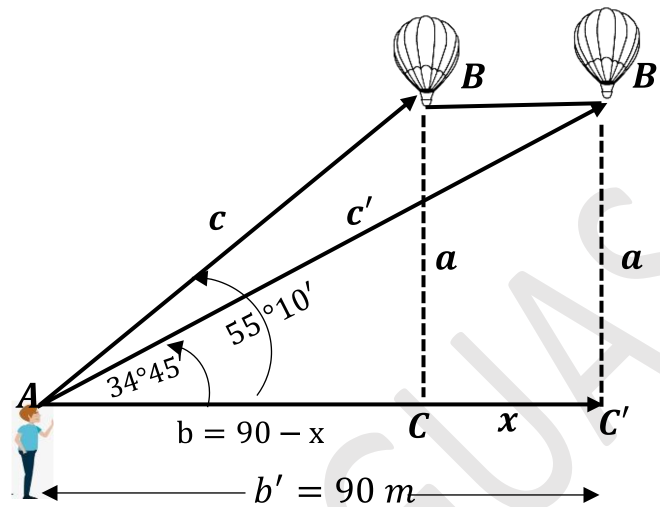
$A_{árbol} = A_{persona} + a$

$A_{árbol} = 1,78\ m + 10,3\ m$

$\boldsymbol{A_{árbol} = 12,08\ m}$

La altura del árbol es de 12, 08 m aproximadamente.

Una persona observa dos globos aerostáticos B y B’ a una misma altura con ángulos de elevación de 55°10’ m y 34°45’ respectivamente. Si la distancia del objeto B está a 90 m de la persona, ¿Cuál es la distancia entre los objetos?



solución:

OBJETO A	OBJETO B
$\tan A = \frac{a}{b}$	$\tan A = \frac{a}{b\prime}$
$\tan 55°\ 10° = \frac{a}{90 - x}$	$\tan 34°\ 45° = \frac{a}{90}$
$1,4370 = \frac{a}{90 - x}$	$0,6937 = \frac{a}{90}$
$a = 1,4370(90 - x)$	$a = 0,6937(90)$
$a = 129,33 - 1,4370x$	$a = 62,43$

$$129{,}33 - 1{,}4370x = 62,43$$

$$129{,}33 - 62{,}43 = 1\ {,}4370x$$

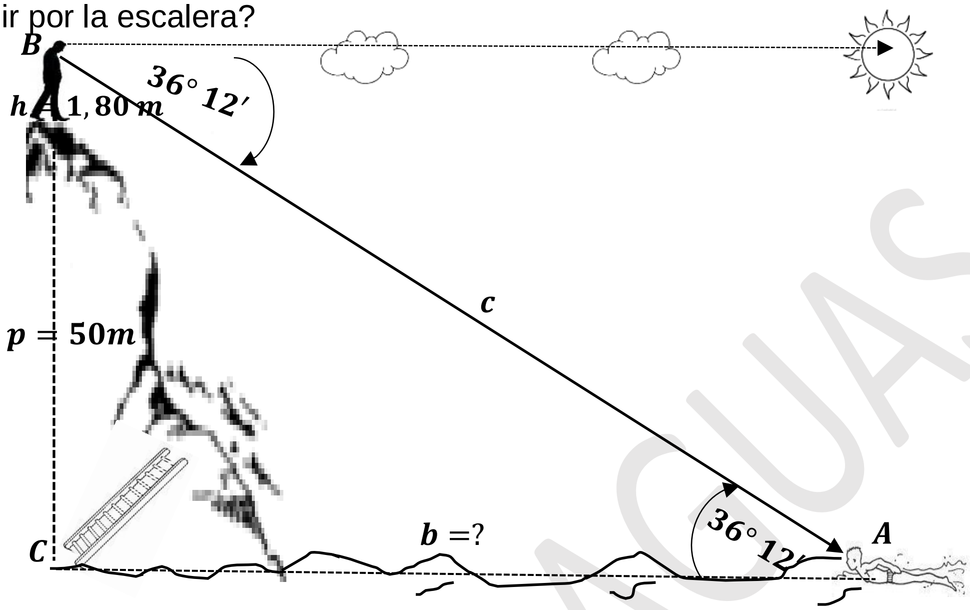
$$66,90 = 1{,}4370x$$

$$\mathrm{x} = \frac{66,90}{1,4370}$$

$$\mathbf{x = \ 46,5\ m}$$

La distancia entre los globos aerostáticos es de 46,5m

Desde una roca a una atura de 50m una persona de 1,80 m observa un bañista con un ángulo de 36° 12’. ¿Cuánto debe nadar el bañista para llegar a la base de la roca y subir por la escalera?



Solución

Sea p la altura del cerro y h la altura de persona, luego

$a = p + h$

$a = 50\ m + 1,80\ m$

$a = 51,80\ m$

$\tan A = \dfrac{a}{b}$

$\tan 36°12' = \dfrac{51,80\ m}{b}$

$0,7319 = \dfrac{51,80\ m}{b}$

$\text{b} = \dfrac{51,80\ m}{0,7319}$

$\mathbf{b} = \boldsymbol{70,77m}$

El bañista debe nadar 70,77m para llegar a la escalera.

CONSIGNA DE APRENDIZAJE Nº 13.2 (IMPARES)

1. Una persona de una altura de 1,67 m observa la parte más alta de un árbol de 20m de altura. Si el ángulo que forma con la horizontal es de 25° 10’, calcule la distancia rectilínea desde la persona hasta el edificio.
2. Una persona de 1,85m observa la cúspide de un edificio de 34 m. si la distancia desde la base de la ubicación de la persona hasta el edificio es de 25 m. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la parte alta del edificio?
3. Desde la parte alta de una roca, una persona de 1,80 m divisa la caída de un objeto extraño a alta velocidad, si el un ángulo de depresión justamente cuando el objeto impacta con el suelo es de 36° 52’ y la distancia desde la base de la roca hasta donde cayó el objeto es de 29,2 m. ¿Cuál es la altura de la roca?
4. Un piloto de barco observa la parte alta de un faro de 120 m de altura con un ángulo de elevación de 34° 22’, Calcule la distancia rectilínea visual del piloto.
5. Un piloto desde el avión en lo alto observa a una persona en una carretera con un ángulo de depresión de 28° 15’, si la línea visual del piloto es de 1400 m. ¿A qué altura se encuentra el avión?
6. Desde la base del suelo se mide la parte alta de un edificio con un ángulo de elevación de 61°11’. La distancia entre la marca donde se midió el ángulo de elevación y la base del edificio es de 13,2 m. ¿Cuál es la altura que existe entre el primer piso cuya altura es de 6 m y la parte más alta del edificio?
7. Calcule la longitud de una escalera que se apoya en un árbol a una altura de 5 m. El ángulo de elevación respecto al árbol es de 64° 5’ medido desde la parte donde la escalera toca el suelo y la altura del árbol es de 13,3 m.
8. Un observador está ubicado en la parte alta de un faro, cuya altura coincide con la cúspide del faro, desde allí mide el ángulo de una embarcación en alta mar de 26° 2’ ¿Cuál es la distancia rectilínea entre el observador y el barco?
9. Se desea construir un tramo de una carretera a través de un cerro de manera que tenga una inclinación cuya altura sobre el nivel del suelo sea 15, 6 m, si la distancia donde se coloca el pin para iniciar la construcción hasta la base del cerro es de 50m ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la carretera y cuál es la longitud de la misma?
10. Desde la parte alta de una cabaña de 4m, un hombre acostado observa dos barcos en un gran lago, si con un teodolito captó los ángulos de ambos barcos A y B en 15° 3’ y 11°6’ respectivamente. ¿Cuál es la distancia entre ambos barcos? Tome en cuenta que la cabaña esta sobre una montaña a 27m sobre el nivel del lago.